3 dicembre 2024

Oss. ("teor. dell'asintoto")

Sia $\varphi: I \to \mathbb{R}$ derivabile con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo illimitato superiormente. Suppongo che esistano

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) =: \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$$

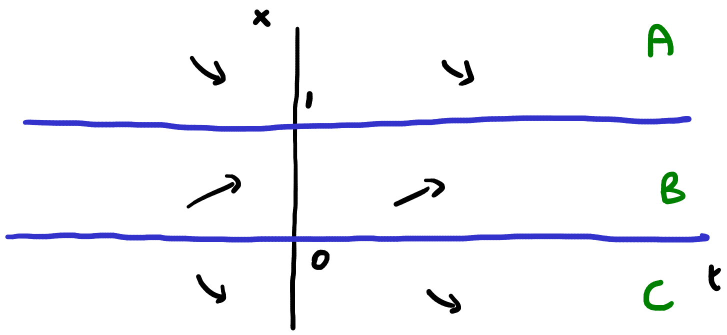
$$\lim_{t \to +\infty} \varphi'(t) =: \beta \in \overline{\mathbb{R}}$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora: $\beta = 0$.

Analogamente per $t \to -\infty$ (I interv. illimitato inferiormente)

Applico il "teor. dell'asintoto" all'equazione logistica:

(*) $y' = y(1-y)$



Suppongo che φ sia soluz. di (*) definita in $(a, +\infty)$

Dato che φ è monotona, esiste $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) =: \alpha$

Oss: se φ "vive" in A: $\alpha \in [1, +\infty)$

se φ "vive" in B: $\alpha \in (0, 1]$

se φ "vive" in C: $\alpha \in [-\infty, 0)$

Dato che φ è soluzione di (*):

$$\forall t\in(a,+\infty):\quad \varphi'(t)=\underbrace{\varphi(t)}_{\downarrow\,\alpha}\,(1-\underbrace{\varphi(t))}_{\downarrow\,(1-\alpha)}$$

$t\to+\infty$:

$$\Rightarrow\ \exists\lim_{t\to+\infty}\varphi'(t)=\underbrace{\alpha(1-\alpha)}_{=:\,\beta}\qquad\text{(in senso ampliato se } \alpha=-\infty)$$

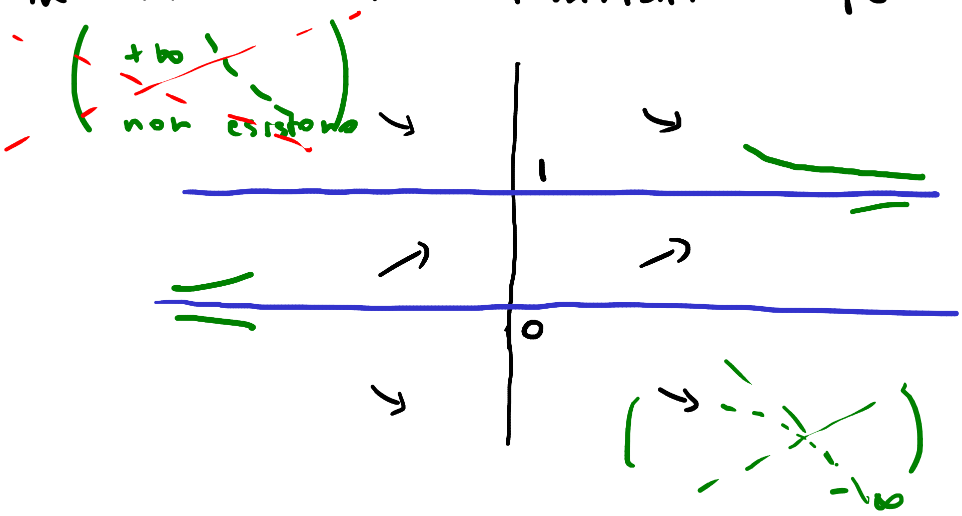
Dal "teor. dell'asintoto":

$$\alpha\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \beta=0\ \iff\ \alpha(1-\alpha)=0$$
$$\iff\ \alpha=0\ \text{ opp. }\ \alpha=1$$

Dunque:

gli unici valori possibili di α affinché $x=\alpha$ sia asintoto orizzontale per il grafico di φ sono $\alpha=0$ e $\alpha=1$.

Stessa cosa per (eventuali) soluzioni definite in intervalli illimitati inferiormente.



- $$y'=\frac{y(1-y)}{t^2+1}=\underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{=:\,g(t)}\underbrace{(y(1-y))}_{=:\,h(y)}=:f(t,y)$$

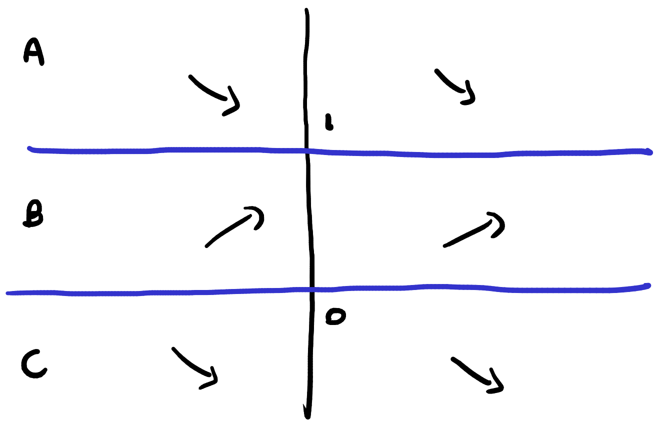
$=:h(y)$ ← la stessa che compare nell' equaz. logistica

$\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (aperto)

$f \in C^1 \Rightarrow$ TEUL si applica $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

($\Rightarrow$ grafici di sol. distinte <u>non</u> si intersecano)

Sol. costanti e monotonia: come nell'eq. log.



Verifico se il teor. dell'asintoto fornisce qualche informazione.

Suppongo che $\varphi : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ sia soluzione dell'eq. diff.; per monotonia:

$$\exists \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) =: \alpha$$

Suppongo $\alpha \in \mathbb{R}$ e valuto

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi'(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\overbrace{\varphi(t)(1-\varphi(t))}^{\to \alpha(1-\alpha) \in \mathbb{R}}}{\underbrace{t^2+1}_{\to +\infty}} = \underline{0}$$

per qualsiasi α!

Non ottengo nessuna informazione

(idem per $t \to -\infty$)

Determino sol. che non assumono i valori 0 e 1

(cioè: diverse dalle sol. costanti).

Determino H primitiva di $\frac{1}{h}$:

$$H'(y) = \frac{1}{y(1-y)}$$

Già fatto: $H(y) = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right|$

Determino G primitiva di g:

$$G'(t) = \frac{1}{t^2+1} \implies \text{scelgo } G(t) = \arctan(t)$$

Allora: φ soluz. dell' eq. diff. $\implies$

$$H(\varphi(t)) = G(t) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\iff \ln\left|\frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)}\right| = \arctan(t) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\iff \odot \quad \left|\frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)}\right| = c\, e^{\arctan(t)} \qquad c \in (0, +\infty)$$

Per soluzioni con valori compresi tra 0 e 1:

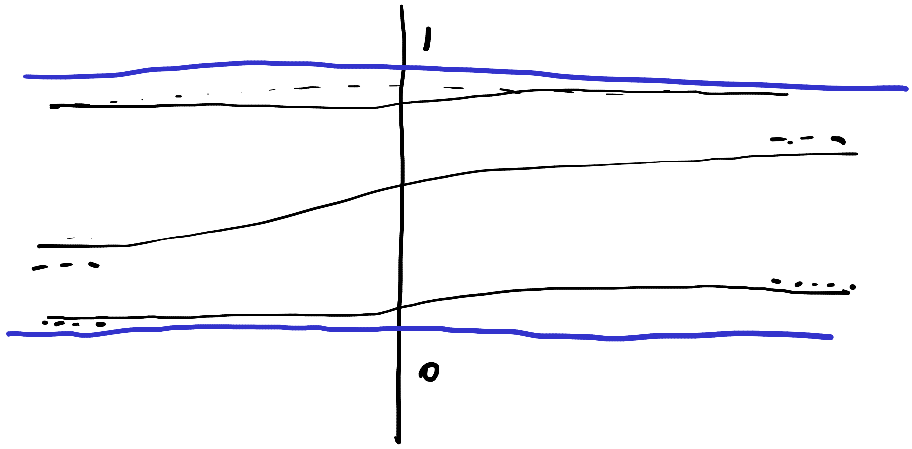
$$\odot \iff \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = c\, e^{\arctan t} \leftarrow \text{tolgo la } |\cdot|$$

$$\varphi(t) = c\, e^{\arctan t} - c\, e^{\arctan t} \varphi(t)$$

$$\underbrace{(1 + c\, e^{\arctan t})}_{>0 \ \forall c>0 \ \forall t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = c\, e^{\arctan t}$$

$$\varphi_c(t) = \frac{c\, e^{\arctan t}}{1 + c\, e^{\arctan t}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_c(t) = \frac{c\, e^{-\pi/2}}{1 + c\, e^{-\pi/2}}, \qquad \lim_{t \to +\infty} \varphi_c(t) = \frac{c\, e^{\pi/2}}{1 + c\, e^{\pi/2}}$$



Per soluzioni con valori minori di 0 oppure con valori maggiori di 1:

$$\odot \iff -\frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = c\, e^{\arctan t}$$

$$\iff \varphi(t) = c\, e^{\arctan t}\, \varphi(t) - c\, e^{\arctan t}$$

$$\iff (c\, e^{\arctan t} - 1)\, \varphi(t) = c\, e^{\arctan t}$$

$$\implies \varphi(t) = \frac{c\, e^{\arctan t}}{c\, e^{\arctan t} - 1} \qquad c > 0$$

condizione: $c\, e^{\arctan t} - 1 \neq 0$

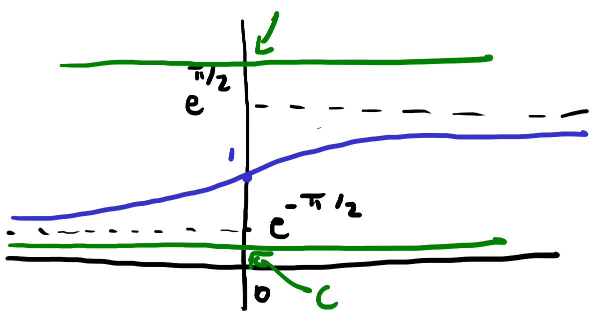
Equivalentemente:

$$\varphi(t) = \frac{e^{\arctan t}}{e^{\arctan t} - c} \qquad c > 0$$

condizione: $e^{\arctan t} - c \neq 0$ (··)

$$\Updownarrow$$

$$e^{\arctan t} \neq c$$



Se $c \in (0, e^{-\pi/2}]$: $e^{\arctan t} > c$

$\Rightarrow$ la condizione $\odot$ è verificata $\forall t \in \mathbb{R}$

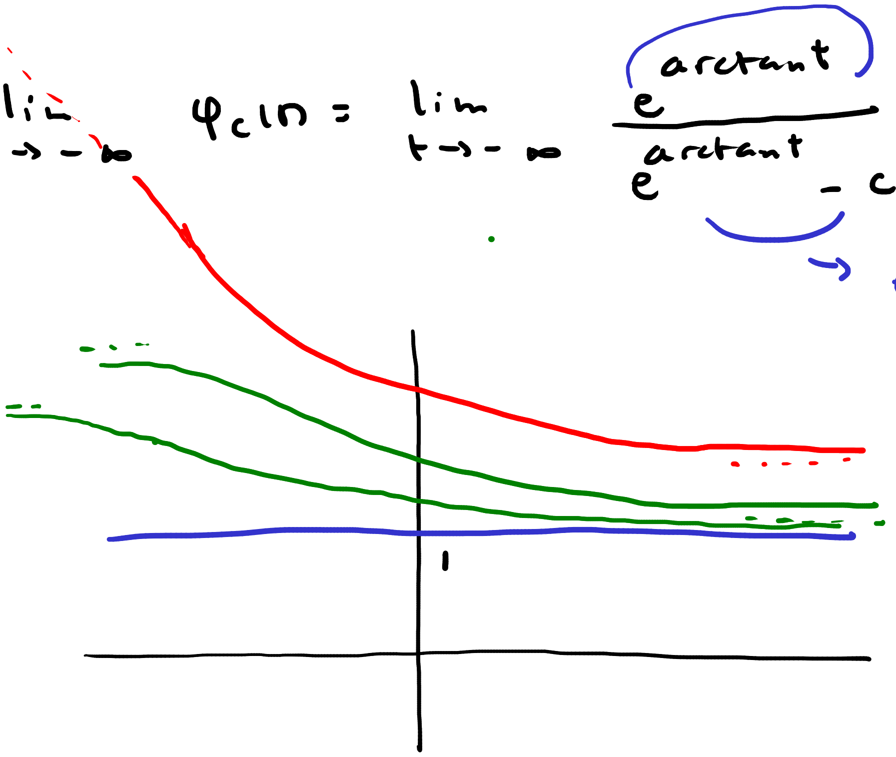
$$\Rightarrow \varphi_c(t) = \frac{e^{\arctan t}}{\underbrace{e^{\arctan t} - c}_{>0}} \quad \text{è definita in } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \varphi_c(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi_c(t) > 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_c(t) = \frac{e^{\pi/2}}{e^{\pi/2} - c} \in \mathbb{R}$$

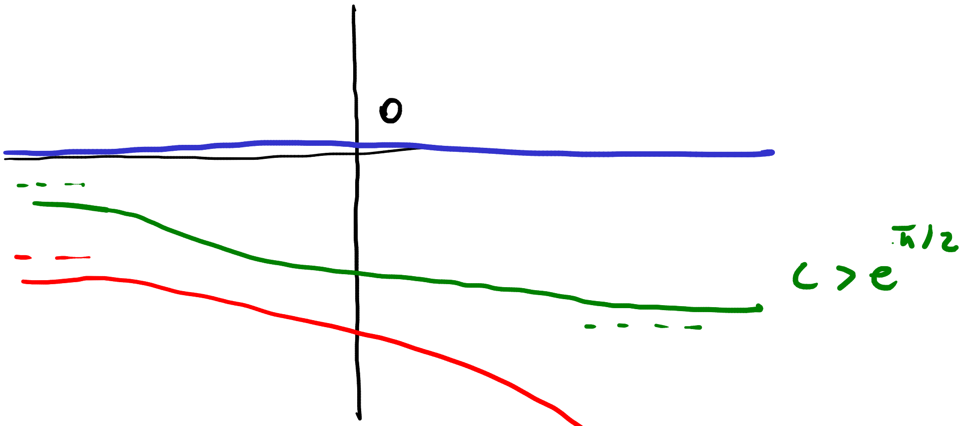
$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_c(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{\arctan t} \to e^{-\pi/2}}{\underbrace{e^{\arctan t} - c}_{\to e^{-\pi/2} - c}} = \begin{cases} \in \mathbb{R} & c < e^{-\pi/2} \\ +\infty & c = e^{-\pi/2} \end{cases}$$



Per $c \in [e^{\pi/2}, +\infty)$: $e^{\arctan t} < c \quad \forall t \in \mathbb{R}$

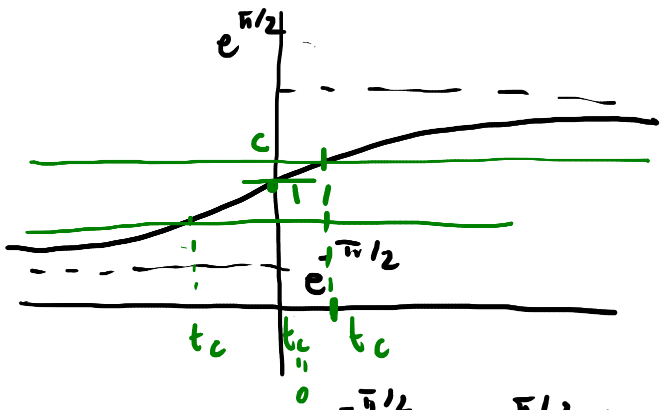
$$\Rightarrow \varphi_c(t) = \frac{e^{\arctan t}}{\underbrace{e^{\arctan t} - c}_{<0}} \quad \text{è definita } \forall t \in \mathbb{R},$$

negativa $\forall t \in \mathbb{R}$



$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_c(t) = \frac{e^{-\pi/2}}{e^{-\pi/2} - c} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_c(t) = \text{"}\frac{e^{\pi/2}}{e^{\pi/2} - c}\text{"} \begin{cases} \in \mathbb{R} & c > e^{\pi/2} \\ -\infty & c = e^{\pi/2} \end{cases}$$



$e^{\arctan t}$

Per $c \in (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2})$: $\exists!\, t_c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$e^{\arctan t} \begin{array}{ll} < c & t \in (-\infty, t_c) \\ = & t = t_c \\ > & t \in (t_c, +\infty) \end{array}$$

La condizione $e^{\arctan t} - c \neq 0$ è soddisfatta

in $(-\infty, t_c)$, $(t_c, +\infty)$ $\Rightarrow$

ho <u>due</u> soluzioni:

$$\underbrace{\psi_c(t)}_{<0} = \frac{e^{\arctan t}}{e^{\arctan t} - c} \qquad t \in (-\infty, t_c)$$

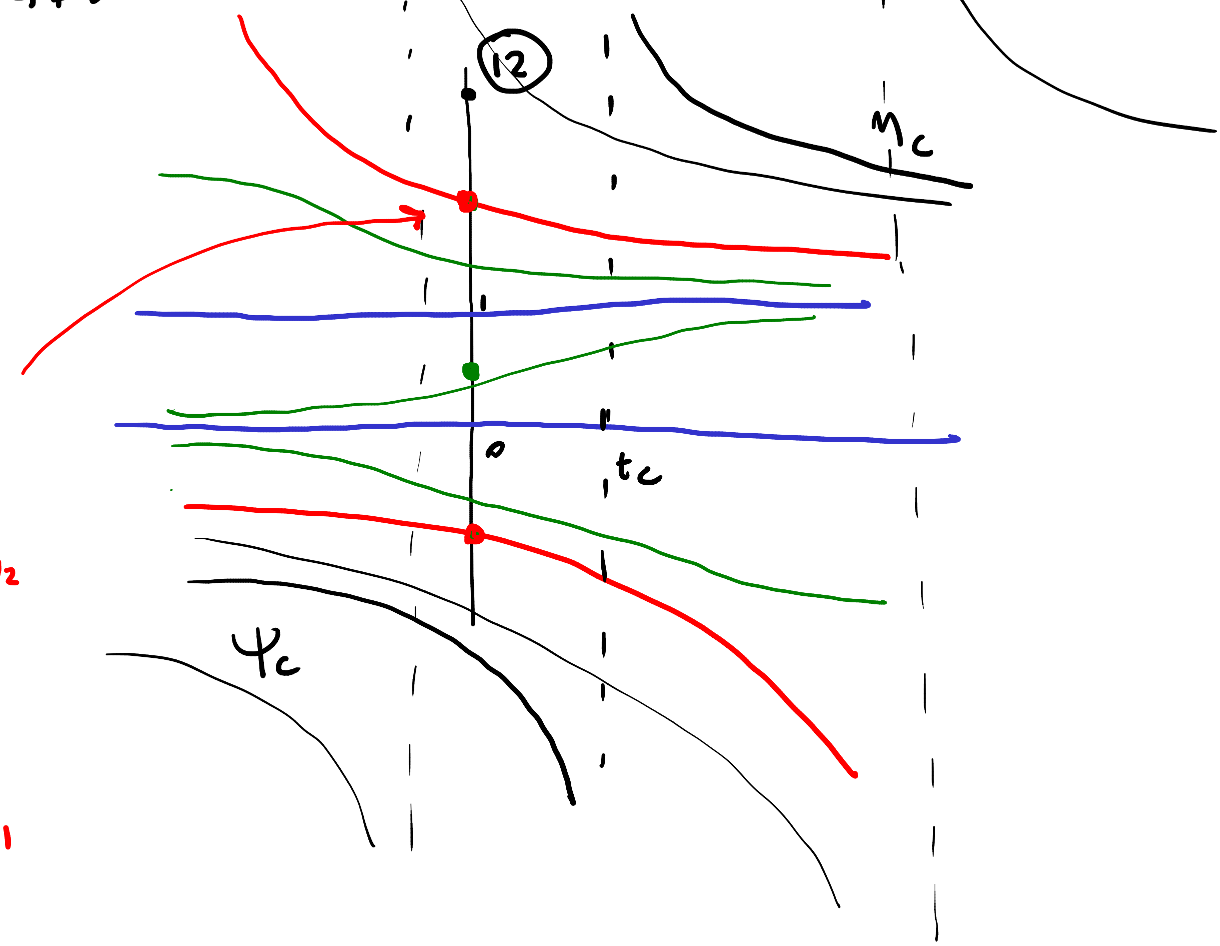
$$\underbrace{\eta_c(t)}_{>0} = \quad \text{"} \qquad t \in (t_c, +\infty)$$

$$\lim_{t \to -\infty} \psi_c(t) = \frac{e^{-\pi/2}}{e^{-\pi/2} - c} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \to t_c^-} \psi_c(t) = \text{"}\frac{(+)}{(0^-)}\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{t \to t_c^+} \eta_c(t) = \dots = +\infty$$

$$\lim_{t \to +\infty} \eta_c(t) = \dots \in \mathbb{R}$$



$$\varphi_{e^{-\frac{\pi}{2}}}(0) = \frac{1}{1 - e^{-\pi/2}} = \frac{e^{\pi/2}}{e^{\pi/2} - 1}$$

Risolvo il PdC con cond. init. $y(0) = \frac{1}{2}$

Scelgo la generica sol. che "vive" tra 0 e 1:

$$\varphi_c(t) = \frac{c\, e^{\arctan t}}{1 + c\, e^{\arctan t}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{c\, e^{0}}{1 + c\, e^{0}} \qquad \frac{1}{2} = \frac{c}{1+c} \qquad 1 + c = 2c$$

$$c = 1$$

La sol. del PdC è

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{e^{\arctan t}}{1 + e^{\arctan t}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Risolvo il PdC con cond. init. $y(0) = 12$

$$\frac{e^{\pi/2}}{e^{\pi/2} - 1} < 12 \quad ?$$

$$e^{\pi/2} < 12 e^{\pi/2} - 12$$

$$11\, e^{\pi/2} > 12 \quad \text{si!}$$

$\Rightarrow$ sol. di "tipo η_c":

$$\eta_c(t) = \frac{e^{\arctan t}}{e^{\arctan t} - c}$$

$$12 = \frac{1}{1-c}, \qquad c = \dots$$

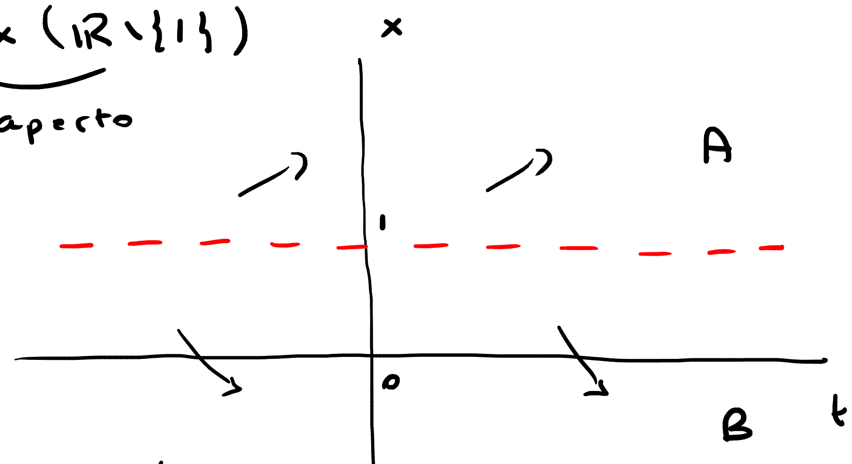
$$t_c = \dots$$

$\square$

- $y' = \dfrac{3t^2-4t+3}{2(y-1)} = \underbrace{(3t^2-4t+3)}_{=:g(t)} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{2(y-1)}}_{=:h(y)} =: f(t,y)$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \times \underbrace{(\mathbb{R}\setminus\{1\})}_{\text{aperto}}$
$=: \Omega$

$f \in C^1$



$\Rightarrow$ TEUL si applica

per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\setminus\{1\})$

OSS: le soluzioni hanno valori sempre > 1 oppure sempre < 1

Sol. costanti? $h(y) = \dfrac{1}{2(y-1)} \neq 0 \quad \forall y$

$\Rightarrow$ non ce ne sono.

Monotonia?

$$y' = \underbrace{(3t^2-4t+3)}_{>0\ \forall t} \; \frac{1}{2(y-1)}$$

Sol. con valori > 1 sono crescenti;
Sol. con valori < 1 sono decresc.

Teor. dell'asintoto?

Suppongo che esista φ soluz. definita in $(a, +\infty)$; per monotonia:

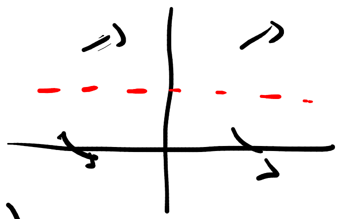
$$\exists \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) =: \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$$

Suppongo $\alpha \in \mathbb{R}$ e valuto

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi'(t)| = \lim_{t \to +\infty} \left| \underbrace{(3t^2 - 4t + 3)}_{\to +\infty} \frac{1}{\underbrace{2(\varphi(t) - 1)}_{\to 2(\alpha - 1) \in \mathbb{R}}} \right| = +\infty$$

$\Rightarrow \varphi'(t) \not\to 0$ ASSURDO!

Conclusione: $\underline{\underline{\text{se}}}$ esistono soluz. definite in intervalli illimitati superiormente, devono divergere per $t \to +\infty$



(Per la monotonia:
sol. in A tendono a $+\infty$
sol. in B tendono a $-\infty$)

Supp. che esista $\varphi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ sol.

Come prima: per monotonia esiste

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) =: \alpha$$

Come prima: α non può essere un numero reale.

Dalla monotonia e la forma di Ω deduco che φ non può nemmeno divergere.

Conclusione: $\underline{\underline{\text{non}}}$ esistono soluzioni definite in intervalli illimitati inferiormente.

Risolvo l'equazione.

Cerco H t.c. $H'(y) = \dfrac{1}{h(y)} = 2(y-1)$

Scelgo $H(y) = (y-1)^2$

Cerco G t.c. $G'(t) = g(t) = 3t^2 - 4t + 3$

Scelgo $G(t) = t^3 - 2t^2 + 3t$

Se φ è soluzione dell'eq. diff:

$$H(\varphi(t)) = G(t) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

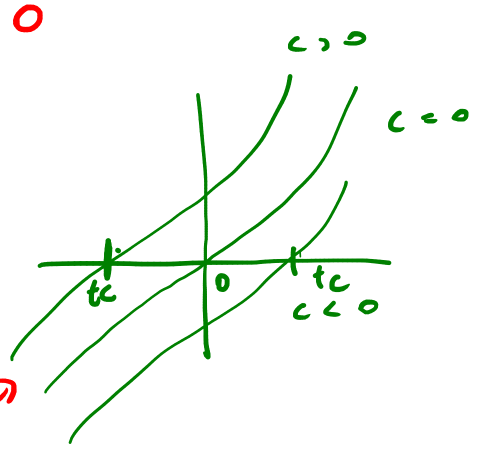
$$\underbrace{(\underbrace{\varphi(t)}_{\neq 1} - 1)}_{\neq 0}{}^{2}_{>0} = t^3 - 2t^2 + 3t + c$$

Condizione: $\underbrace{t^3 - 2t^2 + 3t + c}_{=:\, G_c} > 0$

$G_c' = G' = g > 0$

Soddisfatta in $(t_c, +\infty)$

con t_c unico zero di G_c



Ottengo due soluzioni, entrambe definite

in $(t_c, +\infty)$:

$$\varphi_c^+(t) = 1 + \sqrt{t^3 - 2t^2 + 3t + c}$$

$$\varphi_c^-(t) = 1 - \sqrt{t^3 - 2t^2 + 3t + c}$$

So già che per $t \to +\infty$:

$$\varphi_c^+(t) \to +\infty$$

$$\varphi_c^-(t) \to -\infty$$

Aggiungo:

$$\varphi_c^\pm(t) \sim \pm t^{3/2}$$

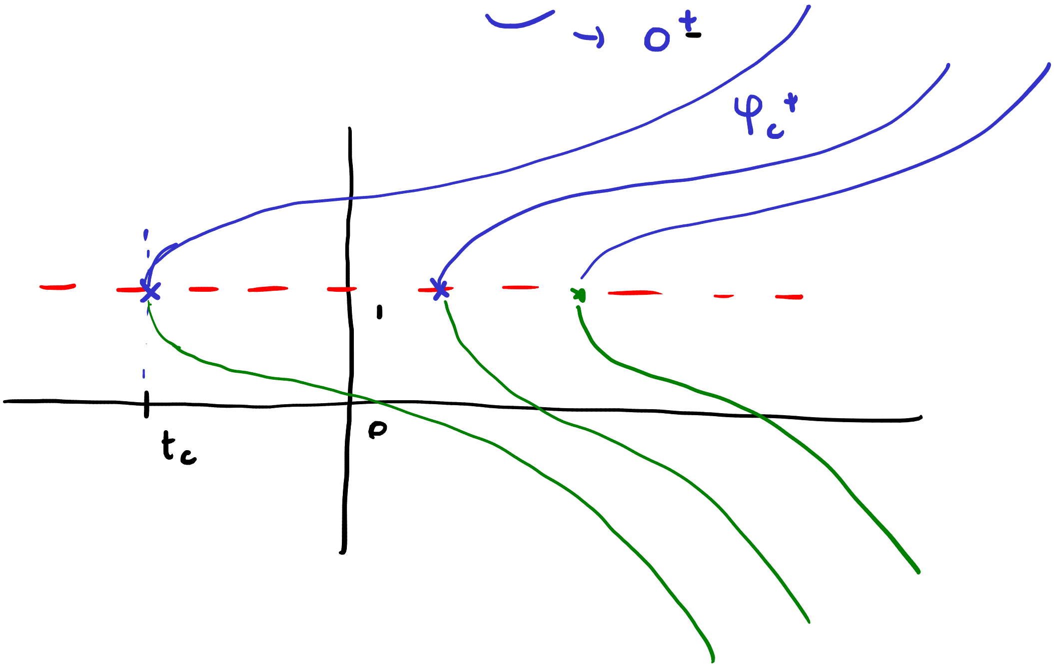
Per $t \to t_c^+$:

$$\varphi_c^+(t) \to 1^+$$

$$\varphi_c^-(t) \to 1^-$$

Con quale pendenza?

$$\varphi_c^{\pm\,\prime}(t) = \frac{\overbrace{3t^2 - 4t + 3}^{\to\, c\,>\,0}}{2(\underbrace{\varphi_c^\pm(t) - 1}_{\to\, 0^\pm})} \xrightarrow[t \to t_c^+]{} \pm\infty$$



$\square$

- $y' = \underbrace{2t}_{g(t)} \underbrace{\sqrt{(1-y)^3}}_{h(y)} =: f(t,y)$

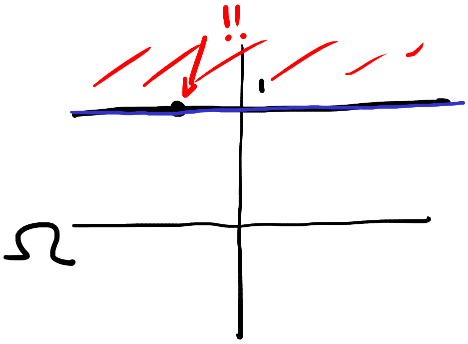
$(1-y)^3 \geq 0$

$1-y \geq 0$

$y \leq 1$

$$\mathrm{dom}(f) = \underbrace{\mathbb{R} \times (-\infty, 1]}_{\text{non è aperto}}$$

$f(t,y) = 2t\,(1-y)^{3/2}$ $\quad > 1$ $\qquad f \in C^1$



TEUL applicabile per ogni:
$(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 1)$

(Grafici di sol. distinte non si intersecano
in $\mathbb{R} \times (-\infty, 1)$).

Sol. costanti? $\quad h(y) = \sqrt{(1-y)^3} = 0 \iff y = 1$

$\Rightarrow \quad \varphi(t) \equiv 1 \quad$ sol. costante

Oss: $\quad f(t,y) = 2t\sqrt{(1-y)^3} = 0$

$\iff \quad y = 1 \quad$ oppure $\quad t = 0$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$??

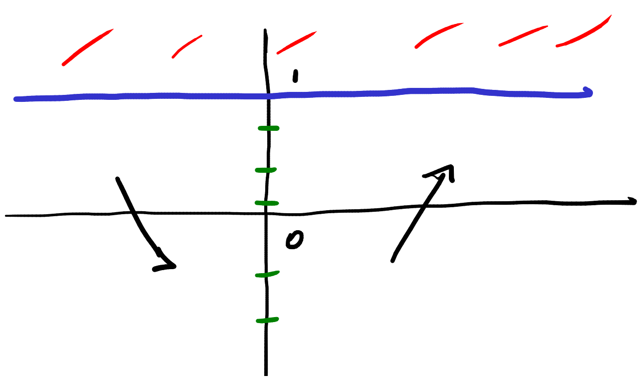
sol. cost.

Se φ è sol. dell'eq. diff. definita in
un intervallo che contiene $t = 0$, allora:

$$\varphi'(0) = f(0, \varphi(0)) = 2 \cdot 0 \sqrt{(1-\varphi(0))^3} = 0$$

$\Rightarrow$ la tangente al grafico di φ in $t=0$
è orizzontale

(Diciamo che $t=0$ è una zero-clina)



Monotonia:
$f(t,y) = 2t \underbrace{\sqrt{(1-y)^3}}_{\geq 0}$

Asintoti?

Suppongo $\varphi: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ sol.

Monotonia $\Rightarrow$ $\exists \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) =: \alpha$

Noto che $\alpha \in \mathbb{R}$ (per forza!)

Valuto $\lim_{t \to +\infty} \varphi'(t) = \lim_{t \to +\infty} \underbrace{2t}_{\to +\infty} \underbrace{\sqrt{(1-\varphi(t))^3}}_{\to \sqrt{(1-\alpha)^3}}$

Se $\sqrt{(1-\alpha)^3} \neq 0$: $\varphi'(t) \to +\infty$ ASSURDO!

Allora necessariamente: $\sqrt{(1-\alpha)^3} = 0$

cioè: $\alpha = 1$.

Conclusione: unico possibile asintoto orizz. per $t \to +\infty$: $x = 1$

(Idem per $t \to -\infty$)

Da completare ...