

Dalla dim. del teor. delle contrazioni:

(X, d) sp. metrico completo, $f: X \rightarrow X$ contraz.

$x_0 \in X$ arbitrario

$$x_1 = f(x_0)$$

$(x_n) \subset X$ di Cauchy

$$x_2 = f(x_1)$$

$$\Rightarrow \exists \bar{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$x_3 = f(x_2)$$

$\bar{x}$ è l'unico p. fisso di f

$\vdots$

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Nella dim. del TEUL:

(X, d_∞) X : palla chiusa in $(C(I_S, \mathbb{R}^n), d_\infty)$
con centro x_0 (funz. costante)
e raggio b

$\bar{\varphi}$: unica sol. del PdC in I_S , cioè
unico punto fisso in X di

$\mathcal{F}: X \rightarrow X$ t.c. $\forall \varphi \in X$:

$$\mathcal{F}(\varphi) := t \in I_S \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

$\bar{\varphi}$ è limite rispetto a d_∞ , cioè

limite uniforme in I_S , della successione di
funzion: definite per ricorrenza ponendo
per ogni $t \in I_S$:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = x_0 \\ \varphi_k(t) = \mathcal{F}(\varphi_{k-1})(t) \\ \quad = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \end{cases}$$

Es:

- Risolvere per approssimazioni successive il PdC

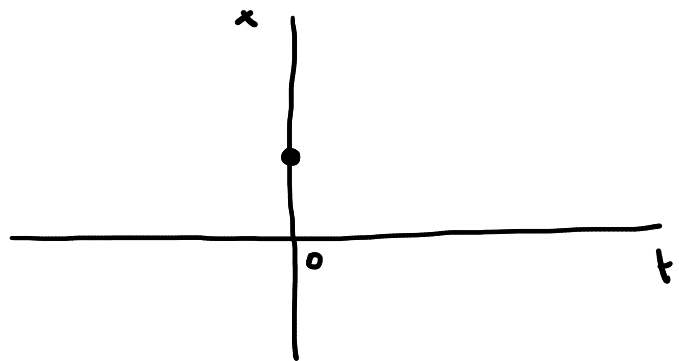
$$\textcircled{1} \begin{cases} y' = y =: f(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione nota:
 $y(t) = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua e lipschitziana
 $f(t, x) = x$ rispetto a x (unif. in t)

$$(t_0, x_0) = (0, 1)$$

Posso scegliere
 $a, b > 0$ arbitrari
e definire



$$\Gamma := [-a, a] \times [1-b, 1+b]$$

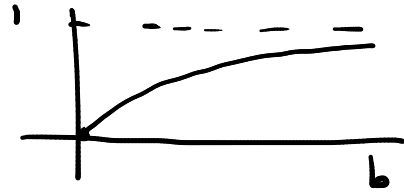
Per il TEUL: $\textcircled{1}$ ha un'unica soluzione in

$$J_\delta := [-\delta, \delta] \quad \text{con} \quad \delta := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

$$\text{con } M := \max_{(t, x) \in \Gamma} |f(t, x)| = \max_{(t, x) \in \Gamma} |x|$$

$$= \max_{x \in [1-b, 1+b]} |x| = 1+b$$

$$\Rightarrow \frac{b}{M} = \frac{b}{1+b} < 1$$



Quindi: la sol. è garantita dal TEUL in $I_\delta := [-\delta, \delta]$ con $\delta < 1$.

Definisco $\forall t \in I_\delta$:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = 1 \\ \varphi_k(t) = 1 + \int_0^t f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \\ \quad = 1 + \int_0^t \varphi_{k-1}(s) ds \end{cases}$$

Calcolo:

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \varphi_0(s) ds = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t \varphi_1(s) ds = 1 + \int_0^t (1+s) ds \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= 1 + \int_0^t \varphi_2(s) ds = 1 + \int_0^t \left(1+s+\frac{s^2}{2}\right) ds \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \end{aligned}$$

⋮

$$\varphi_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^k}{k!}$$

polinomio di
Taylor di
centro 0 di
exp

Nota: per quanto detto sopra, $\varphi_k \rightarrow \exp$
 unif. in $[-\delta, \delta]$; come sappiamo,
 $\varphi_k \rightarrow \exp$ punt. in $\mathbb{R}$ e unif. in
 ogni compatto di $\mathbb{R}$. $\square$

• Risolvo per approx succ. il PdC

$$(2) \quad \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione nota:
 (sin, $\mathbb{R}$)

Riscrivo il PdC in forma vettoriale:

$$y'' + y = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad y'' = -y \quad (:= f(t, y, y'))$$

$$\begin{aligned} u &:= y \\ v &:= y' \end{aligned} \quad \begin{cases} u' = v & =: f_1(t, u, v) \\ v' = -u & =: f_2(t, u, v) \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1 \end{cases}$$

In forma vettoriale: $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad F := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

$$(2) \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} w' = F(t, \overset{(u,v)}{w}) \\ w(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

$\uparrow t_0$

Oss: $\text{dom}(F) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ TEUL applicabile
 F di classe C^1

Volendo, si può stimare δ .

L'unica sol. di ③ è limite uniforme
in $[-\delta, \delta]$ della succ. di funzioni definite
per ricorrenza ponendo per ogni $t \in [-\delta, \delta]$:

$$\varphi_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t F(s, \varphi_{k-1}(s)) ds$$

Pongo $\varphi_k = \begin{pmatrix} \psi_k \\ \eta_k \end{pmatrix}$ e riscrivo per componenti:

$$\begin{cases} \psi_0(t) = 0 \\ \eta_0(t) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_k(t) = 0 + \int_0^t f_1(s, \psi_{k-1}(s), \eta_{k-1}(s)) ds \\ \quad = 0 + \int_0^t \eta_{k-1}(s) ds \\ \eta_k(t) = 1 + \int_0^t f_2(s, \psi_{k-1}(s), \eta_{k-1}(s)) ds \\ \quad = 1 - \int_0^t \psi_{k-1}(s) ds \end{cases}$$

Calcolo, per ogni $t \in [-\delta, \delta]$:

$$\varphi_{1,t}: \begin{cases} \psi_{1,t} = \int_0^t \underbrace{\eta_0(s)}_{=1} ds = \int_0^t 1 ds = t \\ \eta_{1,t} = 1 - \int_0^t \underbrace{\psi_0(s)}_{=0} ds = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_2(t) = \int_0^t \eta_1(s) ds = \int_0^t 1 ds = t \\ \eta_2(t) = 1 - \int_0^t \psi_1(s) ds = 1 - \int_0^t s ds = 1 - \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_3(t) = \int_0^t \eta_2(s) ds = \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds = t - \frac{t^3}{3!} \\ \eta_3(t) = 1 - \int_0^t \psi_2(s) ds = 1 - \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

" ψ_1

$$\begin{cases} \psi_4(t) = \int_0^t \eta_3(s) ds = t - \frac{t^3}{3!} \\ \eta_4(t) = 1 - \int_0^t \psi_3(s) ds = 1 - \int_0^t \left(s - \frac{s^3}{3!}\right) ds \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

" η_2

$$= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}$$

Riconosco che:

$$\psi_k(t) \rightarrow \sin(t)$$

$$\eta_k(t) \rightarrow \cos(t)$$

Nota: puntualm.
in $\mathbb{R}$ e unif.
in ogni compatto
di $\mathbb{R}$.

Dunque: l'unica sol. di ③ è

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \leftarrow \text{unica sol. di ①}$$

□

Dimostro il punto ① delle prop. sulle condizioni sufficienti per la locale lipschitzianità.

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

È sufficiente provare il risultato per $m=1$.

$$\text{Quindi: } f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

suppongo che $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ siano continue in Ω .

Fisso $\Gamma := [\alpha, \beta] \times \bar{B}_r(\bar{x}) \subset \Omega$; dimostro che

f è lipsc. in Γ , cioè che esiste $L > 0$ t.c.

$\forall (t, x), (t, y) \in \Gamma$:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

Per semplicità di scrittura, pongo $B := \bar{B}_r(\bar{x})$.

Osservo che $\Gamma := [\alpha, \beta] \times B$ è compatto e che

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sono continue per ipotesi

(in tutto Ω , quindi anche in Γ).

Per il teor. di Weierstrass: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sono limitate in Γ , quindi esiste $L > 0$

$$\text{t.c. } \forall (t, x) \in \Gamma: \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) \right)^2} \leq L$$

Fisso $t \in [\alpha, \beta]$ e definisco $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$g(x) = f(t, x) \quad \forall x \in B$$

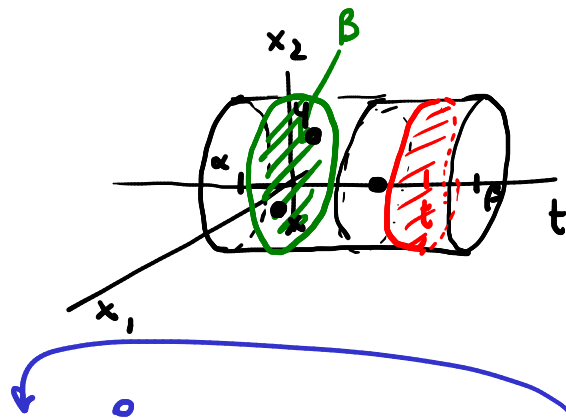
Oss: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\exists \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)$$

continue $\Leftarrow$ continue

$\Rightarrow g$ differenziabile in $\overset{o}{B}$

$[x, y] \setminus \{x, y\} \subset \overset{o}{B}$



Fisso $x, y \in B$; B convesso $\Rightarrow [x, y] \subset B$

Applico il teor. del valor medio (AM II):

$$\exists z \in [x, y] \setminus \{x, y\} \quad t.c. \quad g(x) - g(y) = \nabla g(z) \cdot (x - y)$$

Pertanto: Cauchy-Schwarz

$$\underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\substack{= \\ f(t, x) - f(t, y)}} \leq \underbrace{\|\nabla g(z)\|_{\mathbb{R}^n}}_{\substack{= \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(z)\right)^2}}} \underbrace{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}}_{\substack{= \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, z)\right)^2}}}$$

$$f(t, x) - f(t, y)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(z)\right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, z)\right)^2} \leq L$$

$\uparrow$
 $\in \Gamma$

Riscrivo:

$$\underbrace{|f(t, x) - f(t, y)|}_{\substack{= \\ f(t, x) - f(t, y)}} \leq L \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

□

Oss. su eq. a variabili separabili:

$$y' = g(t) h(y)$$

$$\exists \bar{y} \in \text{dom}(h) \quad \text{t.c.} \quad h(\bar{y}) = 0$$

Dico che la funzione definita ponendo

$$\varphi(t) = \bar{y} \quad \forall t \in \text{dom}(g) \text{ se}$$

$\bar{y}$ è soluz. dell'eq. diff.

$\bar{y}$ è un intervallo,
oppure a uno degli
intervalli che
compongono $\text{dom}(g)$.

• φ derivabile

• $(t, \varphi(t)) = (t, \bar{y}) \in \text{dom}(f)$ (se $t \in \text{dom}(g)$)

• $\forall t: \varphi'(t) = 0$

$$f(t, \varphi(t)) = g(t) h(\varphi(t)) = g(t) h(\bar{y}) = 0$$

Strategia per determinare soluzioni che

non assumono valori che annullano h :

se $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione di $y' = g(t) h(y)$,

allora:

$$\forall t \in I: \quad \varphi'(t) = g(t) h(\varphi(t)) \quad h(\varphi(t)) \neq 0 \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t)$$

Suppongo H primitiva di $\frac{1}{h}$ ($H' = \frac{1}{h}$)

?!

$$\Rightarrow (H \circ \varphi)'(t) = H'(\varphi(t)) \varphi'(t) \\ = \frac{1}{h(\varphi(t))} \varphi'(t)$$

cioè: $H \circ \varphi$ è primitiva di $\frac{1}{h \circ \varphi} \varphi'$

?!

Suppongo G primitiva di g ($G' = g$)

R: prendo $\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t)$,

che mi dice che $H \circ \varphi$ e G sono primitive della stessa funzione

AMI

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } H \circ \varphi = G + c$$

?!

Se H è invertibile, denotata con

$\bar{H}$

la sua inversa, ottengo

$$\varphi(t) = \bar{H}^{-1}(G(t) + c), \quad c \in \mathbb{R}$$

↑

t varia in un intervallo
che dipende da $\text{dom}(g)$ e
da eventuali condizioni imposte
durante il procedimento

Esempi

$$y' = y(1-y)$$

equazione logistica

$$y' = \underbrace{a}_{>0} y - \underbrace{b}_{>0} y = \underbrace{(a-b)}_r y = r y$$

Soluz.: $y(t) = y(0)e^{rt} \rightarrow \begin{cases} 0 & r < 0 \\ y(0) & r = 0 \\ +\infty & r > 0 \end{cases}$

(Malthus)

↓
Verhulst

$$y' = \overset{\geq 0}{a} y (\overset{\geq 0}{k} - y)$$

$$a = k = 1$$

$$\rightarrow y' = y(1-y)$$

$$y' = \underbrace{y(1-y)}_{=: f(t,y)}$$

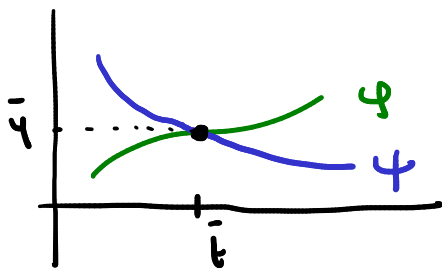
$$g(t) \equiv 1$$

$$h(y) = y(1-y)$$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \Rightarrow$

TEUL $\bar{z}$ applicabile $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

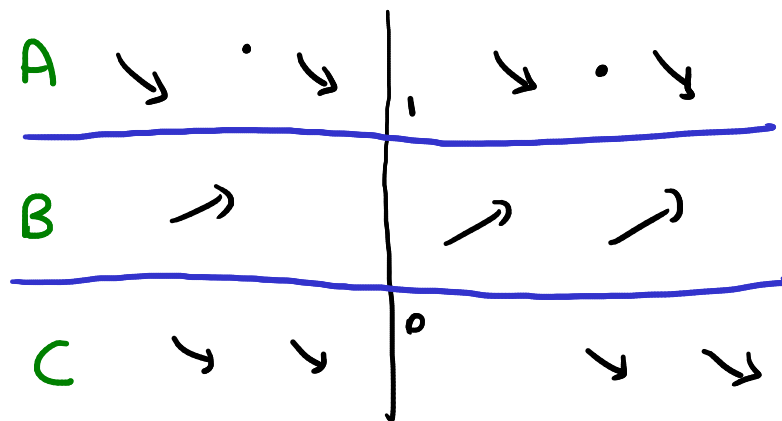
Conseguenza: soluzioni distinte dell'eq. data non possono coincidere in alcun punto comune ai rispettivi intervalli di definizione.



$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(\bar{t}) = \bar{y} \end{cases} \quad \text{avrebbe due soluzioni !!}$$

$$h(y) = y(1-y) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad y=0, \quad y=1$$

$\Rightarrow$ le funzioni costanti di valore 0 e 1, definite in $\mathbb{R}$, sono soluzioni.



Le altre soluzioni: non assumono mai i valori 0 e 1.

Eslicitando: qualsiasi altra soluzione soddisfa

$$\varphi(t) > 1 \quad \forall t, \quad \text{oppure} \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t,$$

$$\text{oppure} \quad \varphi(t) \in (0,1) \quad \forall t$$

In gergo: le soluz. sono "segregate"

Oss: suppongo di avere una sol. $(\varphi, 1)$

$$\text{f.c.} \quad \varphi(t) > 1 \quad \forall t \in I$$

$$\forall t: \quad \varphi'(t) = \underbrace{\varphi(t)}_{>1} \underbrace{(1-\varphi(t))}_{<0} < 0$$

$\Rightarrow \varphi$ è decrescente

$$\text{Se } \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in I : \quad \varphi'(t) < 0 \quad \forall t$$

$$\text{Se } \varphi(t) \in (0,1) \quad \forall t \in I;$$

$$\varphi'(t) = \underbrace{\varphi(t)}_{>0} \underbrace{(1-\varphi(t))}_{>0} > 0$$

Cerco le soluz. non costanti (che non assumono mai valore 0 oppure 1) :

Cerco una primitiva di:

$$\frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

$$\Rightarrow H(y) = \ln|y| - \ln|1-y| = \ln \left| \frac{y}{1-y} \right|$$

Cerco una primitiva di:

$$g(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(t) = t$$

Per quanto detto in generale: la generica soluzione φ soddisfa

$$H(\varphi(t)) = G(t) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

cioè:

$$\ln \left| \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} \right| = t + c$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} \right| = e^{t+c} = e^t \cdot e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

che riserva come

$$\textcircled{*} \quad \left| \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} \right| = c e^t \quad c \in (0, +\infty)$$

Per soluzioni con valori in $(0,1)$:

in gergo:
che vivono
in B

$$\frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} > 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = c e^t$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = c e^t - c e^t \varphi(t)$$

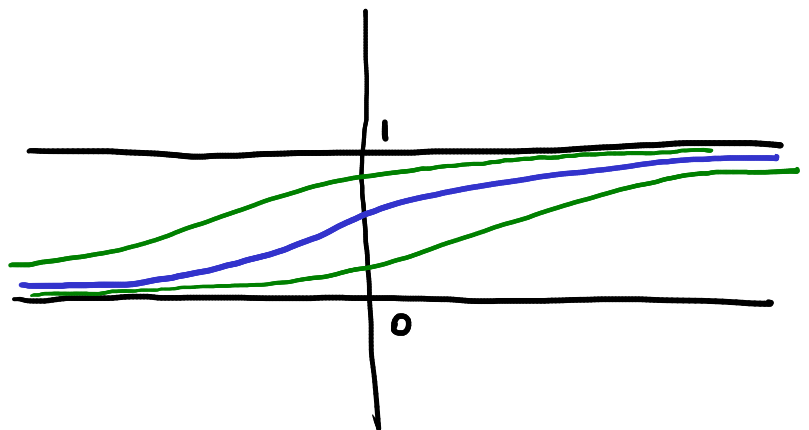
$$\Rightarrow \underbrace{(1 + c e^t)}_{\substack{> 0 \\ \neq 0}} \varphi(t) = c e^t$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{c e^t}{1 + c e^t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Oss:

$$t \rightarrow -\infty : \varphi(t) \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow +\infty : \varphi(t) \rightarrow 1$$



Per le soluzioni "che vivono in A oppure C^n :

$$\frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\textcircled{*} \quad - \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = c e^t$$

$$\varphi(t) = c e^t \varphi(t) - c e^t$$

$$(c e^t - 1) \varphi(t) = c e^t$$

$c e^t - 1$
 $\neq 0$? no!

Oss: $c e^t - 1 \neq 0 \quad (\Rightarrow) \quad e^t \neq \frac{1}{c}$

$$(\Rightarrow) \quad t \neq \ln\left(\frac{1}{c}\right) = -\ln(c)$$

$$\varphi(t) = \frac{c e^t}{c e^t - 1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-\ln(c)\}$$

non è un intervallo!

Correttamente: ho due soluzioni, cioè:

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{c e^t}{c e^t - 1}, \quad t \in (-\infty, -\ln(c))$$

$$\varphi^+(t) = \frac{c e^t}{c e^t - 1}, \quad t \in (-\ln(c), +\infty)$$

$$c \in (0, +\infty)$$

Oss:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{\varphi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\ln(c)^-} \bar{\varphi}(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\ln(c)^+} \varphi^+(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^+(t) = 1$$

