

Dimostro che sono equivalenti

(a) φ sol. di (P)

(b) φ continua e $\forall t \in I_S$:

$$(t, \varphi(t)) \in \Omega \quad \text{e} \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

$a \Rightarrow b$ $\varphi: I_S \rightarrow \mathbb{R}^n$ sol. di (P)

$\Rightarrow \varphi$ derivabile $\Rightarrow$ φ continua

$\forall t \in I_S: (t, \varphi(t)) \in \Omega$ vero per definizione di solut. di (P)

φ sol. di (P), f continua ^{regol.} $\Rightarrow \varphi \in C^1$
 $\Rightarrow \varphi'$ continua

φ sol. di (P):

$$\forall t \in I_S: \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

Integrando membro a membro:

$$\underline{\forall t \in I_S:} \quad \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (=)$$

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (=)$$

φ risolve $\rightarrow$ " x_0 (P)

$$\underline{\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds}$$

$b \Rightarrow a$ Per ipotesi: $\varphi: I_S \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua,

$\forall t \in I_S: (t, \varphi(t)) \in \Omega$ e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad \textcircled{1}$$

In particolare, per $t = t_0$: $\varphi(t_0) = x_0 + 0 = x_0$

Per $\textcircled{1}$: φ è la somma della costante x_0
e della funzione integrale di punto iniziale t_0
della funzione $s \mapsto f(s, \varphi(s))$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{continua}} \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{continua (ipotesi)}} \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{continua (ipotesi (b))}}$

che, per il TFCL (AMI), è una primitiva
della funzione integranda.

Dunque: anche φ è primitiva della funzione
integranda, cioè:

• φ è derivabile in I_S

• $\forall t \in I_S: \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ $\square$

Dimostro che se $\varphi: I_S \rightarrow \mathbb{R}^n$ è sol. continua
di (E), allora:

$$\varphi(I_S) \subset \bar{B}_b(x_0)$$

Esplícito:

$$\varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0) \quad (\Leftrightarrow) \quad \forall t \in I_\delta: \varphi(t) \in \bar{B}_b(x_0)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \forall t \in I_\delta: \|\varphi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b$$

Per assurdo, suppongo che esista $\tilde{t} \in I_\delta$ t.c.

$$\|\varphi(\tilde{t}) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} > b$$

Definisco $h: I_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$h(t) = \|\varphi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} - b$$

Osservo che

- h continua (composta di funz. continue)

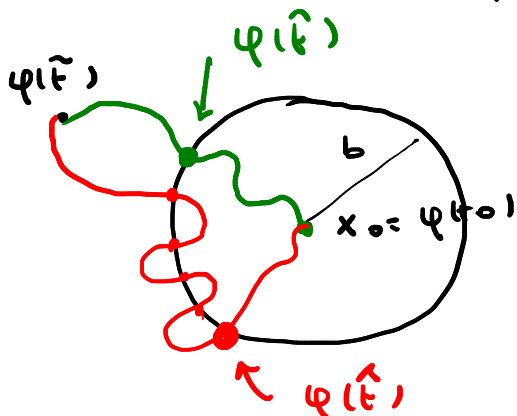
- $h(t_0) = \|\varphi(\underbrace{t_0}_{=x_0}) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} - b = -b < 0$

- $h(\tilde{t}) = \|\varphi(\tilde{t}) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} - b > 0$

Per il teor. degli zeri (AM I) esiste $\hat{t}$ compreso strettamente tra t_0 e $\tilde{t}$ t.c.

$$h(\hat{t}) = 0, \text{ cioè: } \|\varphi(\hat{t}) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} = b$$

e $\|\varphi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b$ per ogni t compreso tra t_0 e $\hat{t}$



Risulta:

$$\textcircled{b} = \| \varphi(\hat{t}) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} = \| x_0 + \int_{t_0}^{\hat{t}} f(s, \varphi(s)) ds - x_0 \|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \| \int_{t_0}^{\hat{t}} f(s, \varphi(s)) ds \|_{\mathbb{R}^n} = \textcircled{w} \quad \begin{array}{l} t_0 < \hat{t} ? \\ \hat{t} < t_0 ? \end{array} !!$$

↳ precisazione: dall'Analisi II so che

se $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, allora:

$$\| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \| g(t) \|_{\mathbb{R}^n} dt$$

se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ qualsiasi:

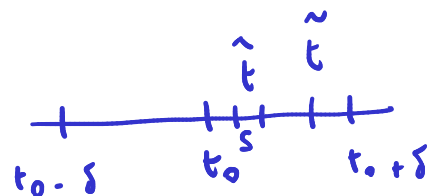
$$\| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \|_{\mathbb{R}^n} \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} \| g(t) \|_{\mathbb{R}^n} dt \right|$$

Inoltre: se $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$, con $0 \leq u \leq v$
 u, v continue, allora:

$$\forall \alpha, \beta \in I \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \right|$$

$$\textcircled{w} \leq \left| \int_{t_0}^{\hat{t}} \underbrace{\| f(s, \varphi(s)) \|_{\mathbb{R}^n}}_{\geq 0 \leq ??} ds \right| = \textcircled{w w}$$

s compreso tra t_0 e $\hat{t}$



$$\Rightarrow s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq [t_0 - a, t_0 + a]$$

$$\Rightarrow \varphi(s) \in \bar{B}_b(x_0)$$

$$\Rightarrow (s, \varphi(s)) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}_b(x_0) = \Gamma$$

$$\Rightarrow \|f(s, \varphi(s))\|_{\mathbb{R}^n} \leq M$$

2^a precisazione

$$(*) \leq \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}} M ds \right| = M |\tilde{t} - t_0|$$

$$< M |\tilde{t} - t_0| \leq M \delta \quad \delta := \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

$$\leq M \cdot \frac{b}{M} = \bar{b}$$

Dunque: $b < \bar{b}$, assurdo! $\square$

Dimostro il Lemma

$$\varphi \in \mathcal{X}, \quad \hat{\varphi} : \underline{I_S} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ t.c.}$$

$$\hat{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad \forall t \in \underline{I_S}$$

$\hat{\varphi}$ è continua (in realtà: di classe C^1)

perché somma di una costante e della funzione integrale di punto iniziale t_0 della funzione $s \mapsto f(s, \varphi(s))$, che è continua perché lo sono f (per ipotesi) e φ (perché $\varphi \in \mathcal{X}$)

Verifico che $\hat{\varphi}$ ha immagine contenuta in $\bar{B}_b(x_0)$.

$\forall t \in \underline{I_S}$:

$$\| \hat{\varphi}(t) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} = \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - x_0 \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(s, \varphi(s))\|_{\mathbb{R}^n}}_{\substack{\geq 0 \\ \leq M}} ds \right|$$

$$\varphi \in \mathcal{X} \Rightarrow \varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0)$$

$$\Rightarrow (s, \varphi(s)) \in \Gamma \quad \forall s \text{ tra } t_0 \text{ e } t$$

$$\leq M |t - t_0| \leq M \delta \leq \underline{M \frac{b}{M}} = \underline{b}$$

Dunque: $\hat{\varphi}(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0)$. $\square$

Dimostro che, data $\varphi: I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, sono equivalenti:

(a) φ sol. continua di (E) con $\varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0)$

(b) $\varphi \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{F}(\varphi) = \varphi$ (φ punto fisso di $\mathcal{F}$)

$\varphi \in \mathcal{X} \stackrel{\text{def. di } \mathcal{X}}{\Leftrightarrow} \varphi \text{ continua e } \varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0)$

$$\mathcal{F}(\varphi) = \varphi \Leftrightarrow \forall t \in I_\delta: \mathcal{F}(\varphi)(t) = \varphi(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I_\delta: x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds = \varphi(t)$$

$$\Leftrightarrow \varphi \text{ risolve (E)}. \quad \square$$

Dimostro la Prop. 3.

R:chiamo; $g: X \rightarrow X$ (X, d) sp. metrico.

g è contrazione se $\exists \alpha \in (0,1)$ t.c.

$$\forall x, y \in X : d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

$\mathcal{F}: X \rightarrow X$? $\exists \alpha \in (0,1)$ t.c. $\forall \varphi, \psi \in X :$

$$d_\infty(\mathcal{F}(\varphi), \mathcal{F}(\psi)) \leq \alpha d_\infty(\varphi, \psi)$$

Fisso $\varphi, \psi \in X$.

$$\|\mathcal{F}(\varphi) - \mathcal{F}(\psi)\|_\infty \leq \alpha \|\varphi - \psi\|_\infty$$

Voglio valutare

$$\|\mathcal{F}(\varphi) - \mathcal{F}(\psi)\|_\infty$$

$$\sup_{t \in I_\delta} \|\mathcal{F}(\varphi)(t) - \mathcal{F}(\psi)(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

Quindi: fisso $t \in I_\delta$ e valuto

$$\|\mathcal{F}(\varphi)(t) - \mathcal{F}(\psi)(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

linearità

$$= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\|_{\mathbb{R}^n}}_{\substack{\in \Gamma \\ \leq ?}} ds \right| = (*)$$

$\in [t_0 - a, t_0 + a] \in \bar{B}_b(x_0)$ perché $\varphi, \psi \in X$

Denoto con $L(>0)$ la costante di Lipschitz

di f in Γ . Dunque: $\forall s$ compreso tra t_0 e t

$$\|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\|_{\mathbb{R}^n} \leq L \|\varphi(s) - \psi(s)\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq L \|\varphi - \psi\|_{\infty}$$

$$\textcircled{*} \leq \left| \int_{t_0}^t L \|\varphi - \psi\|_{\infty} ds \right|$$

$$= L \|\varphi - \psi\|_{\infty} |t - t_0|$$

Ricapitolando: $\forall t \in I_{\delta}$:

$$\|\mathcal{F}(\varphi)(t) - \mathcal{F}(\psi)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L \|\varphi - \psi\|_{\infty} \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \delta} \quad \textcircled{1}$$

Passando all'estremo superiore:

$$\|\mathcal{F}(\varphi) - \mathcal{F}(\psi)\|_{\infty} \leq \underbrace{L\delta}_{=: \alpha} \|\varphi - \psi\|_{\infty}$$

Se sapessi che $L\delta \in (0, 1)$, avrei provato che $\mathcal{F}$ è contrazione; ma no - lo so...

Rifaccio: conti con $\mathcal{F}^2 := \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$

$\forall t \in I_{\delta}$:

$$\|\mathcal{F}^2(\varphi)(t) - \mathcal{F}^2(\psi)(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \|\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi))(t) - \mathcal{F}(\mathcal{F}(\psi))(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mathcal{F}(\varphi)(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \mathcal{F}(\psi)(s)) ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \underbrace{\mathcal{I}(\varphi)(s)}_{\in \Gamma}) - f(s, \underbrace{\mathcal{I}(\psi)(s)}_{\in \Gamma})) ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\| f(s, \underbrace{\mathcal{I}(\varphi)(s)}_{\in \bar{B}_b(x_0)}) - f(s, \underbrace{\mathcal{I}(\psi)(s)}_{\in \Gamma}) \|_{\mathbb{R}^n}}_{\in \chi} ds \right|$$

$$\leq L \|\mathcal{I}(\varphi)(s) - \mathcal{I}(\psi)(s)\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} L L \|\varphi - \psi\|_{\infty} |s - t_0|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t L^2 \|\varphi - \psi\|_{\infty} |s - t_0| ds \right|$$

$$= L^2 \|\varphi - \psi\|_{\infty} \left| \left[\frac{|s - t_0|^2}{2} \right]_{t_0}^t \right|$$

$$= L^2 \|\varphi - \psi\|_{\infty} \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

Ricapitolando: $\forall t \in I_\delta$:

$$\|\mathcal{I}^2(\varphi)(t) - \mathcal{I}^2(\psi)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L^2 \|\varphi - \psi\|_{\infty} \frac{\overbrace{|t - t_0|^2}^{\leq \delta^2}}{2} \quad (2)$$

Passando al sup:

$$\|\mathcal{I}^2(\varphi) - \mathcal{I}^2(\psi)\|_{\infty} \leq \left(\frac{L^2 \delta^2}{2} \right) \|\varphi - \psi\|_{\infty}$$

Se sapessi: che $\frac{L^2 \delta^2}{2} \in (0, 1)$, avrei provato
che $\mathcal{I}^2$ è contrazione; ma non lo so...

Iterando, ottengo che per ogni $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\| \mathcal{F}^j(\varphi) - \mathcal{F}^j(\psi) \|_\infty \leq \frac{L^j \delta^j}{j!} \| \varphi - \psi \|_\infty$$

Oss: $\frac{L^j \delta^j}{j!} = \frac{(L\delta)^j}{j!}$ $\leftarrow$ progr. geometrica
 $\leftarrow$ fattoriale

AM I $\Rightarrow \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{(L\delta)^j}{j!} = 0$

Posso scegliere k suff. grande t.c.

$$\frac{(L\delta)^k}{k!} < 1$$

Per i conti fatti: $\forall \varphi, \psi \in X$

$$\| \mathcal{F}^k(\varphi) - \mathcal{F}^k(\psi) \|_\infty \leq \underbrace{\left(\frac{(L\delta)^k}{k!} \right)}_{< 1} \| \varphi - \psi \|_\infty$$

Quindi: $\mathcal{F}^k$ è contrazione. $\square$

Denoto con $\bar{\varphi}$ l'unico punto fisso di $\mathcal{F}^k$ in X
(esiste per la prop. 3 + teor. contrazioni)

Quindi: $\bar{\varphi} \in X \quad \mathcal{F}^k(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi} \quad \odot$

$\bar{\varphi}$ è l'unico elemento di X che
soddisfa $\odot$

Verifico che $\bar{\varphi}$ è anche punto fisso di $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\bar{\varphi}) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^k(\bar{\varphi})) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^k)(\bar{\varphi}) \\ &= (\mathcal{F} \circ \underbrace{\mathcal{F} \circ \dots \circ \mathcal{F}}_k)(\bar{\varphi}) \\ &= (\mathcal{F} \circ \underbrace{\dots \circ \mathcal{F}}_k \circ \mathcal{F})(\bar{\varphi}) = (\mathcal{F}^k \circ \mathcal{F})(\bar{\varphi}) \\ &= \mathcal{F}^k(\mathcal{F}(\bar{\varphi}))\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}(\bar{\varphi})$ è punto fisso di $\mathcal{F}^k$ $\leftarrow$ ha un solo punto fisso, che si chiama $\bar{\varphi}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi}$$

cioè: $\bar{\varphi}$ è punto fisso di $\mathcal{F}$.

Verifico che $\bar{\varphi}$ è l'unico punto fisso di $\mathcal{F}$,

cioè che se $\tilde{\varphi} \in X$ e $\mathcal{F}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}$, allora:

$$\tilde{\varphi} = \bar{\varphi}.$$

Sia $\tilde{\varphi} \in X$ t.c. $\mathcal{F}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}$. Allora:

$$\mathcal{F}^2(\tilde{\varphi}) = \mathcal{F}(\underbrace{\mathcal{F}(\tilde{\varphi})}_{=\tilde{\varphi}}) = \mathcal{F}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ è punto fisso anche di $\mathcal{F}^2$

Inoltre:

$$\mathcal{F}^3(\tilde{\varphi}) = \mathcal{F}(\underbrace{\mathcal{F}^2(\tilde{\varphi})}_{=\tilde{\varphi}}) = \mathcal{F}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} \text{ è punto fisso anche di } \mathcal{F}^3$

$\vdots$

$\tilde{\varphi}$ è punto fisso anche di $\mathcal{F}^k$,

ma $\mathcal{F}^k$ ha $\bar{\varphi}$ come unico punto fisso,

quindi: $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi} \quad \square$