21 novembre 2024

Esempi

- $f : \mathbb{R}^{\overset{=1+1}{2}} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(t,x) = t(1-x^2)$

  $n = 1 \qquad y' = t(1-y^2) \quad \circledast$

Soluzione di $\circledast$? Coppia (φ, I) con

- $I \subset \mathbb{R}$ intervallo
- $\varphi : I \to \mathbb{R}$ derivabile
- $\forall t \in I : \quad (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R}^2$ (ovvio!)
- $\forall t \in I : \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

  $\iff \quad \varphi'(t) = t(1-\varphi(t)^2)$

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.c. $f(t, x_1, x_2) = t(1-x_1^2)$

  $n = 2 \qquad y'' = f(t, y, y') = t(1-y^2)$

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.c. $f(t, x_1, x_2) = t(1-x_2^2)$

  $n = 2 \qquad y'' = t(1-(y')^2)$

Esempi

- $\underbrace{y'' - \sin(ty') + t^3 y}_{F(t,\, y,\, y',\, y'')} = 0 \qquad F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\iff \quad y'' = \underbrace{\sin(ty') - t^3 y}_{f(t,\, y,\, y')}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad f(t, x_1, x_2) = \sin(t\,x_2) - t^3 x_1$$

- $y''' + \ln(t)\, y' - t \arcsin(y'') = 0$

$$y''' = -\ln(t)\, y' + t \arcsin(y'')$$

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = -\ln(t)\, x_2 + t \arcsin(x_3)$$

$$\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-1, 1] =: \Omega$$

- $t^2 y'' + t y' + y^3 + e^t = 0$

In forma generale:

$$F(t, x_1, x_2, x_3) = t^2 x_3 + t x_2 + x_1^3 + e^t$$

$$\mathrm{dom}(F) = \mathbb{R}^4 = \underline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^3$$

In forma normale?

$$t^2 y'' = -t y' - y^3 - e^t$$

$$y'' = -\frac{1}{t} y' - \frac{1}{t^2} y^3 - \frac{e^t}{t^2}$$

$$f(t, x_1, x_2) = -\frac{1}{t} x_2 - \frac{1}{t^2} x_1^3 - \frac{e^t}{t^2}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \underline{\mathbb{R}^*} \times \mathbb{R}^2$$

- $(y')^2 - \sin(t) + e^y = 0$

Forma generale: $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(t, x_1, x_2) = x_2^2 - \sin(t) + e^{x_1}$$

Forma normale ?

$$\underbrace{(y')^{2}}_{\geq 0} = \underbrace{\sin(t) - e^{y}}_{\geq 0}$$

Due equazioni:

$$y' = \sqrt{\sin(t) - e^{y}} = f(t, y)$$

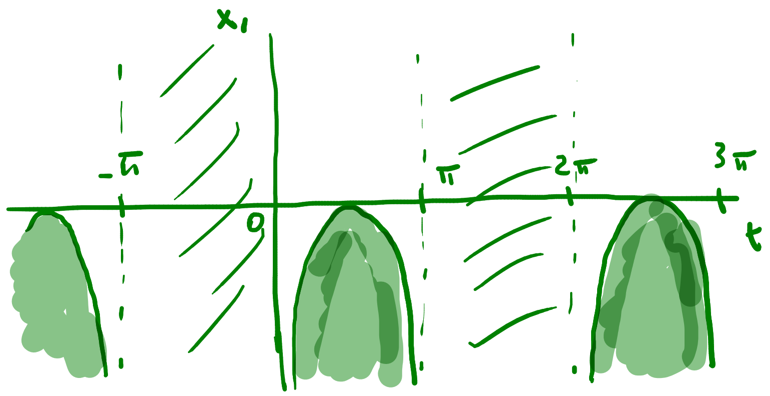
$$y' = -\sqrt{\sin(t) - e^{y}} = -f(t, y)$$

con $f(t, x_1) = \sqrt{\sin(t) - e^{x_1}}$

$$\mathrm{dom}(f) = \{(t, x_1) \mid \sin(t) - e^{x_1} \geq 0\}$$

$e^{x_1} \leq \sin(t)$

per $\sin(t) > 0$: $x_1 \leq \ln(\sin(t))$



Definisco cos'è una soluzione di un PdC.

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$

$$(P) \begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = x_1^0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

Una soluzione di (P) è una coppia (φ, I) con

- $I \subset \mathbb{R}$ intervallo che contiene t_0

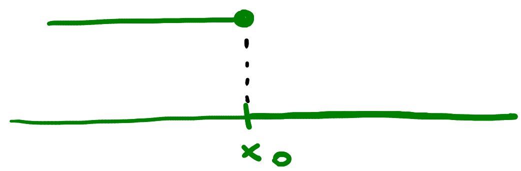
- $\varphi: I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte
- $\forall t \in I: \; (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in I: \; \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$
- $\varphi(t_0) = x_1^0, \; \varphi'(t_0) = x_2^0, \; \dots, \; \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$

Esempi

① PdC che non ha soluzioni

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\quad h(x) = \begin{cases} 1 & x \leq x_0 \\ 0 & x > x_0 \end{cases}$

Verifico che il PdC



$$(P) \begin{cases} y' = h(y) =: f(t,y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

non ammette alcuna soluzione definita in un intorno destro di $t=0$.

Per assurdo, suppongo che esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq 0 < \beta$ e $\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ t.c.

$(\varphi, (\alpha, \beta))$ sia soluzione di (P)

Cioè:

- φ è derivabile in $[\alpha, \beta]$
- $\forall t \in [\alpha, \beta]: \quad (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R}^2$
- $\forall t \in [\alpha, \beta]: \quad \underline{\varphi'(t)} = f(t, \varphi(t)) = \underline{h(\varphi(t))}$
- $\varphi(0) = x_0$

Valuto $\varphi'(0) = h(\varphi(0)) = h(x_0) = 1 > 0$

$$\varphi'(0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} > 0$$

TPS

$\Rightarrow \quad \exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall t \in (0,\delta)$: $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} > 0$

cioè: $\forall t \in (0,\delta)$: $\dfrac{\varphi(t)-x_0}{t} > 0$

$\Rightarrow \quad \forall t \in (0,\delta): \quad \varphi(t) - x_0 > 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall t \in (0,\delta): \quad \varphi(t) > x_0$

$\Rightarrow \quad \forall t \in (0,\delta): \quad h(\varphi(t)) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall t \in (0,\delta): \quad \varphi'(t) = 0$

!!!

Quindi:

- φ continua in $[0,\delta)$
- $\varphi(0) = x_0$
- $\varphi'(t) = 0 \quad \forall t \in (0,\delta)$

$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 \quad \forall t \in [0,\delta)$

L'assurdo mostra che (P) non ha soluzioni.

② PdC con (almeno) due soluzioni:

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f(t,x) = 3x^{2/3}$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(f continua)

OSS: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tc $\varphi(t) = 0 \quad \forall t$

$(\varphi, \mathbb{R})$ è sol. di (P)

Considero $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t^3$

$\varphi(0) = 0$ ✓

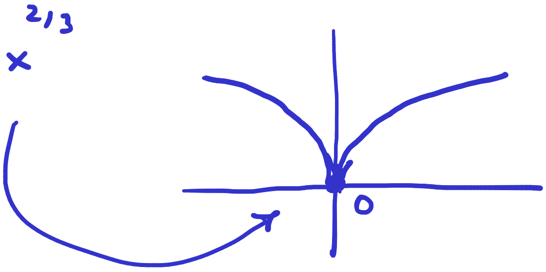
φ derivabile in $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}$: $\varphi'(t) = 3t^2$

$$3(\varphi(t))^{2/3} = 3(t^3)^{2/3} = 3t^2$$

$\Rightarrow$ $(\varphi, \mathbb{R})$ è sol. di (P) $\square$

Oss: $g(x) = x^{2/3}$



punto cuspidale

Oss: $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \Omega$

Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) soluzione del PdC

$$(P) \begin{cases} y''' = f(t, y, y', y'') \\ y(t_0) = x_1^0, \quad y'(t_0) = x_2^0, \quad y''(t_0) = x_3^0 \end{cases}$$

Esplicito:

① φ è derivabile tre volte in I

② $\forall t \in I: \quad (t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) \in \Omega$

③ $\forall t \in I: \quad \varphi'''(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t))$

④ $\varphi(t_0) = x_1^0, \quad \varphi'(t_0) = x_2^0, \quad \varphi''(t_0) = x_3^0$

Definisco $\quad \varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \varphi_3 := \varphi''$

$$\Phi := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad \Phi: I \to \mathbb{R}^3$$

① $\Rightarrow \quad \Phi$ è derivabile in I

② $\Leftrightarrow \quad \forall t \in I: \quad (t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \in \Omega$

$\Leftrightarrow \quad \forall t \in I: \quad (t, \Phi(t)) \in \Omega$

Poi:

$$\left.\begin{aligned} \forall t \in I: \quad \varphi_1'(t) &= \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) &= \varphi_3(t) \\ \varphi_3'(t) &= \varphi'''(t) \overset{③}{=} f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) \\ &= f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \end{aligned}\right\} (*)$$

Definisco $\quad f_1, f_2, f_3 : \Omega \to \mathbb{R} \quad$ ponendo

$f_1(t, x_1, x_2, x_3) = x_2$ (proiezione)

$f_2(t, x_1, x_2, x_3) = x_3$ "

$f_3(t, x_1, x_2, x_3) = f(t, x_1, x_2, x_3)$

e $\quad F := (f_1, f_2, f_3)$

Rileggo (e riscrivo) $\circledast$:

$$\forall t \in I: \quad \varphi_1'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$$

$$\varphi_2'(t) = f_2(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$$

$$\varphi_3'(t) = f_3(t, \underbrace{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)}_{\Phi(t)})$$

Cioè: $\forall t \in I: \quad \bar{\Phi}'(t) = F(t, \Phi(t))$

Infine:

(4) $\iff \varphi_1(t_0) = x_1^0, \quad \varphi_2(t_0) = x_2^0, \quad \varphi_3(t_0) = x_3^0$

$\iff \bar{\Phi}(t_0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) =: x_0$

Quindi:

(φ, I) sol. del PdC scalare di ordine n

$\Rightarrow (\bar{\Phi} := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), I)$ sol. del PdC vettoriale di ordine 1

Viceversa: supponso $\bar{\Phi}: I \to \mathbb{R}^3$ sol. del PdC vettoriale di ordine 1.

$\bar{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

Definisco $\varphi := \varphi_1$

Dico che φ risolve il PdC scalare di ordine n.

Dal sistema: $\varphi_1' = \varphi_2$ der.

$\varphi_2' = \varphi_3$ der.

$\varphi = \varphi_1 \qquad \varphi_2 = \varphi_1' = \underline{\varphi'}$ deriv.

φ_3 der. $\iff$ φ_2' der. $\iff$ φ_1'' der. $\iff$ φ'' der.

$\iff$ φ der. $\underline{3}$ volte

. . .

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x', y, y', z, z') \\ y'' = g(t, x, x', y, y', z, z') \\ z'' = h(t, x, x', y, y', z, z') \end{cases}$$

$u_1 = x \qquad u_2 = x' \qquad u_3 = y \qquad u_4 = y' \qquad u_5 = z \qquad u_6 = z'$

$$\begin{cases} u_1' = u_2 & =: v_1(t, u_1, \dots, u_6) \\ u_2' = f(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) & =: v_2(\quad) \\ u_3' = u_4 & =: v_3(\quad) \\ u_4' = g(t, u_1, \dots, u_6) & =: v_4(\quad) \\ u_5' = u_6 & =: v_5(\quad) \\ u_6' = h(t, u_1, \dots, u_6) & =: v_6(\quad) \end{cases}$$

$U := (u_1, \dots, u_6) \qquad V := (v_1, \dots, v_6)$

$$U' = V(t, U)$$

Dimostro la Prop. sulla regolarità.

① $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$

(φ, I) soluz. di $y' = f(t, y)$

$\Rightarrow \forall t \in I: \quad \varphi'(t) = \underbrace{f}_{\substack{\text{continua} \\ \text{(ipotesi)}}}(t, \varphi(t))$

derivabile $\Rightarrow$ cont.

$\Rightarrow t \mapsto f(t, \varphi(t))$ continua

$\Leftrightarrow \varphi'$ continua $\Leftrightarrow \varphi$ di classe C^1.

② Oss: ① $\Leftrightarrow k = 0$

Per induzione:
suppongo la proprietà vera per k
e la dimostro per $k+1$.

Suppongo $f \in C^{k+1}$
Considero (φ, I) sol. di $(*)$

$$f \in C^{k+1} \Rightarrow f \in C^k \overset{\text{induz.}}{\Rightarrow} \varphi \in C^{k+1}$$

$$\forall t: \quad \varphi'(t) = \underbrace{f}_{C^{k+1}}(t, \underbrace{\varphi(t)}_{C^{k+1}}) \quad C^{k+1}$$

$$\Rightarrow \varphi' \in C^{k+1} \Rightarrow \varphi \in C^{k+2} \qquad \square$$

Oss. sulla lipschitzianità di funzioni vettoriali:

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$: $\quad \underbrace{|f_i(t,x) - f_i(t,y)|}_{} \leq \underbrace{\| f(t,x) - f(t,y) \|_{\mathbb{R}^m}}_{\leq L \|x-y\|_{\mathbb{R}^n}}$

$\forall i \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$|x_i| \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n}$

$\forall i: \quad \exists L_i > 0$ t.c. $\forall \begin{matrix}(t,x)\\(t,y)\end{matrix} \in \Omega$:

$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| \leq L_i \|x-y\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow \quad \|f(t,x) - f(t,y)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(t,x) - f_i(t,y)|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_i}_{=:L} \|x-y\|_{\mathbb{R}^n}$$