

Dimostro il punto ② del teor. di convergenza.

Ip: f continua e regolare a tratti (2π -periodica)

Tesi: SdF di f converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$

Per ①: SdF di f converge puntualmente in $\mathbb{R}$
a $\tilde{f}$;

$$f \text{ continua} \Rightarrow \tilde{f} = f$$

Quindi: SdF di f conv. punt. in $\mathbb{R}$ a f .

Dunque: mi basta dimostrare che SdF di f
converge unif. in $\mathbb{R}$.

Pertanto: basta dimostrare che SdF di f
converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Per la cond. sufficiente, basta dimostrare che

$$\sum_n |a_n| \quad \text{e} \quad \sum_n |b_n|$$

convergono ($a_n, b_n :=$ coeff. di Fourier di f)

f reg. a tratti $\Rightarrow$ prolungando f' prendendola
uguale a 0 nei punti in cui non è definita
otengo una funzione continua a tratti.

Per la disug. di Bessel, denotati con α_n e β_n
i coeff. di Fourier di f' , la serie di

termine $\alpha_n^2 + \beta_n^2$ è convergente, ^(crit. del confronto) pertanto:

le serie di termine α_n^2 e β_n^2 sono convergenti

Calcolo α_n e β_n :

$$\int \varphi' \psi = \varphi \psi - \int \varphi \psi'$$

$f' \cos \quad f \cos'$

$$\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\left[f(x) \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0 \text{ periodicità}} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-n \sin(nx)) dx \right)$$

$$= n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = n b_n$$

┌ $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ ok!

$f'(x) \sim 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n n \sin(nx) + b_n n \cos(nx))$ └

Analogamente:

$$\beta_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx = \dots = -n a_n$$

Quindi:

$$\sum_n \alpha_n^2, \sum_n \beta_n^2 \text{ convergenti } (=)$$

$$\sum_n n^2 b_n^2, \sum_n n^2 a_n^2 \text{ convergenti } (*)$$

Osservo che:

$$\forall n: |a_n| = \overbrace{|a_n|}^a \cdot \overbrace{\frac{1}{n}}^b \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{n^2 a_n^2}_{\substack{\text{termine di serie} \\ \text{convergente} \\ \textcircled{x}}} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\substack{\text{termine di serie} \\ \text{armon.} \\ \text{gener.} \\ p=2}} \right)$$

regola della
somme
e del
moltiplo.
=>

$$\sum_n \frac{1}{2} \left(n^2 a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) \text{ converge}$$

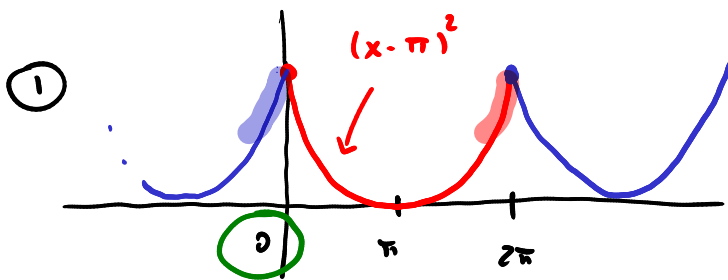
confronto

$$\Rightarrow \sum_n |a_n| \text{ converge.}$$

Analogamente: $\sum_n |b_n| \text{ converge.}$

□

Verifico se il teor. si applica agli esempi ①-④



f continua in $\mathbb{R}$

f di classe C^1 in $(0, 2\pi)$ e tutti i "tracelli"
 2π -periodici

Cosa succede nei punti di raccordo?

Studio $x=0$ (per periodicità ...)

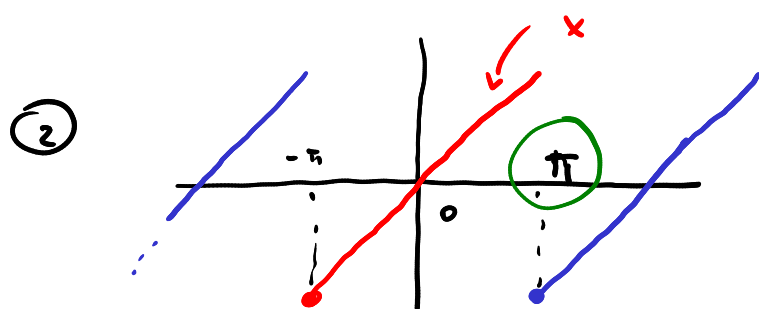
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(x-\pi) = -2\pi \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} 2(x-\pi) = 2\pi \in \mathbb{R}$$

↑
periodicità

$\Rightarrow f \in C^1$ a tratti in $\mathbb{R}$

② $\Rightarrow$ SdF di f converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$.



f è di classe C^1 in $(-\pi, \pi)$ e i suoi traslati periodici.

Studio $x = \pi$ (per periodicità ...)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} x = \pi \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} x = -\pi \in \mathbb{R} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)} \right\} \Rightarrow$$

↑
period.

f è continua a tratti.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x) = \dots = 1 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x)} \right\} \Rightarrow f \text{ è}$$

regol.
a tratti

Regularizzata:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & x \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

$$x = \pi: \quad \tilde{f}(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

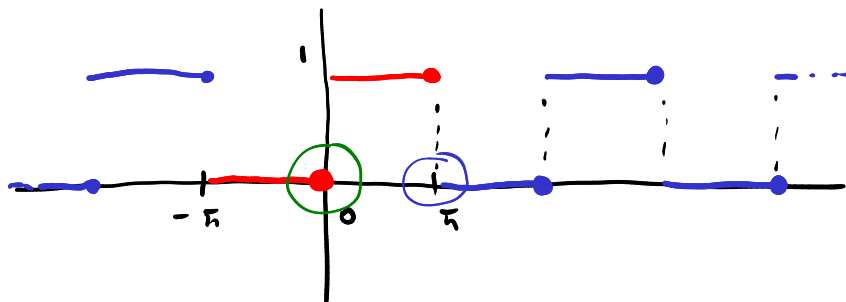
Teorema $\Rightarrow$

- SdF di f conv. punt. in $\mathbb{R}$ a $\tilde{f}$
- SdF di f conv. a f uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

③ e ④ *studiateli voi!*

"Onda quadra": funzione 2π -periodica t.c.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0] \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$



f è di classe C^1 in $(0, \pi)$ e traslati π -periodici

f non è continua in $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\ln x = 2k\pi$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x+t) = 1 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(x+t) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(2k\pi) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$\ln x = (2k+1)\pi$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x+t) = 0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(x+t) = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{f}((2k+1)\pi) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Oss: $\forall k: f'|(2k\pi, (2k+1)\pi) \equiv 0$

$\Rightarrow \dots f$ è regolare a tratti.

Conclusione:

• SdF converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \frac{1}{2} & x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

• SdF converge a f uniformemente in qualsiasi intervallo compatto contenuto in $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Determino la SdF:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \underbrace{f(x)}_{\equiv 0} dx + \int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\equiv 1} dx \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}$$

$n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

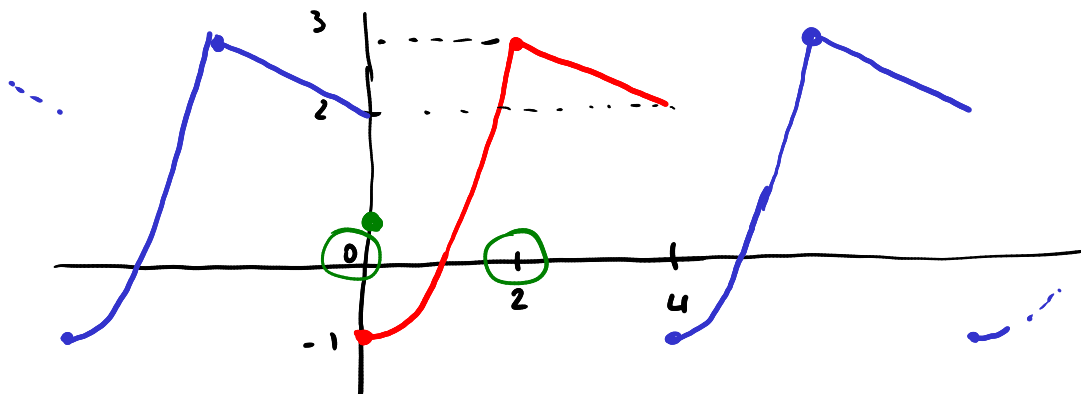
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{2}{\pi n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{SdF: } \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

• f 4-periodica

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \in [0, 2) \\ 4 - \frac{x}{2} & x \in [2, 4) \end{cases}$$



f è di classe C^1 in $(0, 2) \cup (2, 4)$ (e traslati).

Per $x=0$: f non continua

$$f(0^-) = 2, \quad f(0^+) = -1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(0) = 2 + \frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

$\in \mathbb{R} \quad \checkmark$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x = 4 \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Conclusione: f è reg. a tratti $\Rightarrow$

- sdf conv. a $\tilde{f}$ puntualm. in $\mathbb{R}$
- sdf conv. a f unif. negli intervalli compatti di $\mathbb{R} \setminus \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Impongo il calcolo dei coeff. di Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \left(\int_0^2 (x^2 - 1) dx + \int_2^4 (4 - \frac{x}{2}) dx \right) = \dots$$

$n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{4} nx\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 (x^2 - 1) \cos\left(\frac{\pi}{2} nx\right) dx + \int_2^4 (4 - \frac{x}{2}) \cos\left(\frac{\pi}{2} nx\right) dx \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 (x^2 - 1) \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right) dx + \int_2^4 (4 - \frac{x}{2}) \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right) dx \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\text{sdf: } a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi}{2} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right) \right)$$

$$\left(\text{Per } x=0: a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \tilde{f}(0) = \frac{1}{2} \right)$$

Verifico che $\forall x_0, x \in [-\pi, \pi]$

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) dx$$

con f cont. a tratti, a_0, a_n, b_n coeff. di Fourier.

Definisco $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$g(x) = \int_{-\pi}^x (f(t) - a_0) dt$$

- g continua in $[-\pi, \pi]$ (perché funzione integrale)
- f continua a tratti in $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow g$ è regol. a tratti in $[-\pi, \pi]$

(e $g' = f - a_0$ dove g è derivabile)

Oss: $g(-\pi) = 0$

$$g(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a_0) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - a_0 \cdot 2\pi = 0$$

$\uparrow$
per definizione
di a_0

$\Rightarrow g(-\pi) = g(\pi)$

$\Rightarrow$ posso prolungare g a $\mathbb{R}$ ottenendo una funzione periodica continua in $\mathbb{R}$.

Per il teor. di convergenza: la s.d.f. di g converge a g unif. in $\mathbb{R}$ (quindi punt.)

Perciò: denotati con A_0, A_n, B_n i coeff.

di Fourier di g :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad g(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

In particolare, presi $x, x_0 \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) \\ &\quad - \left(A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(nx_0) + B_n \sin(nx_0)) \right) \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^x (f(t) - a_0) dt - \int_{-\pi}^{x_0} (f(t) - a_0) dt &= \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n (\cos(nx) - \cos(nx_0)) + B_n (\sin(nx) - \sin(nx_0))) \end{aligned}$$

cioè:

$$\int_{x_0}^x (f(t) - a_0) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \int_{x_0}^x -n \sin(nt) dt + B_n \int_{x_0}^x n \cos(nt) dt \right)$$

cioè:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x a_0 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n B_n \int_{x_0}^x \cos(nt) dt - n A_n \int_{x_0}^x \sin(nt) dt$$

cioè:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x a_0 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x (n B_n \cos(nt) - n A_n \sin(nt)) dt$$

però: $g' = f - a_0$
ha coeff. di Fourier
nulli per $n \geq 1$

$$\alpha_n = n b_n$$

$$\beta_n = -n a_n$$

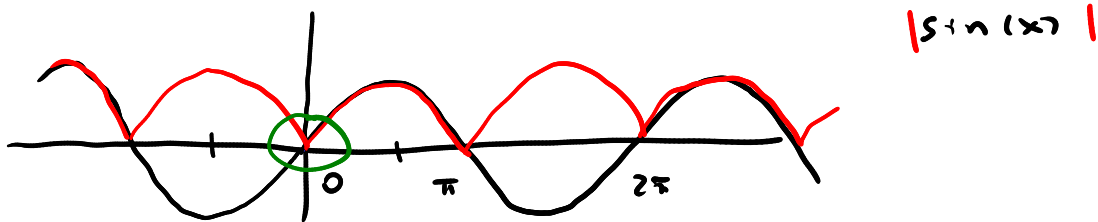
Per il calcolo fatto dimostrando Teor. ②.

$$a_n = n B_n$$

$$b_n = -n A_n$$

Sostituendo, ottengo la tesi. $\square$

• $f(x) = |\sin(x)| \quad x \in \mathbb{R}$



f π -periodica, pari ($\Rightarrow b_n = 0$)

f continua in $\mathbb{R}$

$x=0$ (e multipli) punto angoloso $\Rightarrow \dots$

f è regol. a tratti.

$\Rightarrow$ SdF conv. a f unif. in $\mathbb{R}_+$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{2}{\pi}$$

$\forall n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{\pi} nx\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(2nx) dx = \dots \end{aligned}$$

$$\text{SdF: } \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{a_n} \cos(2nx) dx$$

da completare per esercizio ...

ES : $y^2 + (y')^2 - 1 = 0 \quad (\sin, \mathbb{R})$

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$F(t, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$

$(\sin, \mathbb{R})$ è soluzione?

- $\mathbb{R}$ intervallo ✓
- $\sin$ derivabile in $\mathbb{R}$ ✓
- $\forall t \in \mathbb{R} : (t, \sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^3$ ✓
- $\forall t \in \mathbb{R} :$

$F(t, \sin t, \cos t)$

$= (\sin t)^2 + (\cos t)^2 - 1 = 0 \quad \checkmark$