

$$\bullet \quad (t^2+1)y'' + ty' - y = 0 \quad (1)$$

$$(2) \quad y'' + \underbrace{\frac{t}{t^2+1}}_{a_1(t)} y' - \underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{a_0(t)} y = 0$$

$$a_1, a_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ricordo che $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \quad \forall t \in (-1, 1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$$

$$\Rightarrow a_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$$

$$\Rightarrow a_0 \text{ analitica in } t_0=0 \text{ con r.d.c.} = 1$$

$$\Rightarrow a_1(t) = t \cdot \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n+1}$$

$$\Rightarrow a_1 \text{ analitica in } t_0=0 \text{ con r.d.c.} = 1$$

Quindi: l'equazione data ammette un SFS
costituito da funzioni analitiche
in $t_0=0$ con r.d.c. ≥ 1

Cerco una soluzione del tipo $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$

con c_n da determinare.

Derivo t.c.t. e sostituisco in (2): ??

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n+1} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1} \right) +$$

$$- \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \right) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot t^n$$

??

Digressione: prodotto di serie numeriche

Supp. $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{R}} = A \ (\in \mathbb{R})$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{b_n}_{\in \mathbb{R}} = B \ (\in \mathbb{R})$

Nota: la serie somma di termine $a_n + b_n$ converge e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

Domande: la serie di termine $a_n \cdot b_n$

• è convergente?

• ha somma $A \cdot B$? **No!!**

Esempio:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 =: A \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} =: B \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cdot B = 2 \cdot \frac{3}{2} = \underline{3} \neq$$

Però: $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$

Si chiama **serie prodotto (secondo Cauchy)** delle serie di termine a_n e b_n la serie di termine

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Funzione?

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_{1-0} + a_1 b_{1-1} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_{2-0} + a_1 b_{2-1} + a_2 b_{2-2} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

...

Teorema (di Mertens)

Se le serie di termine a_n e b_n convergono, e almeno una delle due converge assolutamente, allora: la serie di termine c_n (con c_n definito sopra) converge e ha somma $A \cdot B$.

Mostro con un esempio che senza l'ipotesi sottolineata in blu la conclusione del teorema non è garantita.

$$\text{Pongo } a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_n (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{converge (Leibniz)} \\ \text{non conv. assolut.} \quad \left(\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right| \sim \frac{1}{n^{1/2}}, \frac{1}{2} < 1 \right)$$

$$\begin{aligned} c_n &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \right) \end{aligned}$$

①

Verifico che ① non tende a 0 (da cui: $c_n \not\rightarrow 0$ che implica $\sum_n c_n$ non converge)

Oss:

$$\begin{aligned} (k+1)(n-k+1) &= \left(k + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - k + 1\right) \\ &= \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) - \left(\frac{n}{2} - k\right)\right] \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) + \left(\frac{n}{2} - k\right)\right] \\ &= \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{n}{2} - k\right)^2}_{\geq 0} \leq \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{n}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{1}{\frac{n}{2} + 1} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \textcircled{\circ} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{\frac{n}{2} + 1} \right) \text{ non dipende da } k$$

$$= (n+1) \frac{1}{\frac{n}{2} + 1} = \left(\frac{n+1}{\frac{n}{2} + 1} \right) \rightarrow 2 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

□

Per le serie di potenze:

siano date

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - \underbrace{R_a}_{>0}, x_0 + R_a)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - \underbrace{R_b}_{>0}, x_0 + R_b)$$

Pongo $R_m := \min \{R_a, R_b\}$

Per il teor. di Mertens:

la serie prodotto (secondo Cauchy) delle due serie di potenze date converge (almeno) in $(x_0 - R_m, x_0 + R_m)$ e ha somma f.g

Eslicito: $\forall x \in (x_0 - R_m, x_0 + R_m)$:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n (a_k (x-x_0)^k) (b_{n-k} (x-x_0)^{n-k})$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \underbrace{(x-x_0)^n}_{\text{non dipende da } k}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-x_0)^n$$

Quindi: la serie prodotto secondo Cauchy di due serie di potenze di centro x_0 è una serie di potenze di centro x_0 con

- coefficienti uguali ai "prodotti alla Cauchy" delle successioni dei coefficienti
- rdc $\geq$ del minimo tra i rdc delle due serie.

Fine della digressione.

Torno all'esempio.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n+1} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1} \right) +$$

$$- \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n} t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{c_n}_{b_n} t^n \right) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot t^n$$

$a_n = (-1)^{n/2} \quad n \text{ pari}$
 $= 0 \quad n \text{ dispari}$

COMPLICATO !!!

Conviene tornare a

$$(t^2+1) y'' + t y' - y = 0$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n ; \text{ derivo, sostituisco:}$$

$$\forall t \in (-1, 1):$$

$$(t^2 + 1) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + t \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \overset{2c_2 + 6c_3 t + \dots}{n(n+1)} c_{n+2} t^n + \\ & + \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot t^n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2c_2 - c_0 = 0 \\ 6c_3 + c_1 - c_1 = 0 \\ n(n-1)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} + \underline{n c_n} - \underline{c_n} = 0 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{c_0}{2}$$

$$c_3 = 0$$

$$\underline{c_{n+2}} = \frac{1 - n - n(n-1)}{(n+2)(n+1)} c_n$$

$$= \frac{1 - n - n^2 + n}{(n+2)(n+1)} c_n = - \frac{(n-1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} c_n$$

$$= - \underline{\frac{n-1}{n+2} c_n} \quad \forall n \geq 2$$

c_0, c_1 arbitrari

$$c_2 = \frac{c_0}{2}$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = - \frac{1}{4} c_2 = - \frac{1}{8} c_0$$

$$c_5 = - \frac{3-1}{3+2} \underbrace{c_3}_{=0} = 0 \quad \text{"} \\ c_6 = c_7 = \dots$$

$$c_6 = -\frac{3}{6} c_4 = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} c_0 = \frac{1}{16} c_0$$

⋮

Quindi: $\forall t \in (-1, 1)$:

$$y(t) = \underbrace{c_0}_{=0} + c_1 t + \underbrace{c_2 t^2}_{=0} + \underbrace{c_3 t^3}_{=0} + \dots$$

$$= \left(c_0 + \frac{c_0}{2} t^2 - \frac{1}{8} c_0 t^4 + \frac{1}{16} c_0 t^6 + \dots \right) + c_1 t$$

$$= c_0 \underbrace{\left(1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{16} - \dots \right)}_{y_1(t)} + c_1 \underbrace{t}_{y_2(t)}$$

↑
r.d.c. ???

r.d.c. = $+\infty$

□

$T > 0$: $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} k x\right)$

$$\forall x: f(x+T) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} k (x+T)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} k x + 2\pi k\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{T} k x\right) = f(x)$$

$\Rightarrow f$ è periodica di periodo T .

Es: serie trigonometrica con coefficienti

$$a_n = \frac{n^6}{n!}$$

↑
 $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = 0$$

↑
 $n \geq 1$

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^6}{n!} \cos(nx) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \left| \frac{n^6}{n!} \cos(nx) \right| \leq \frac{n^6}{n!} =: M_n$$

$$\sum_n M_n \text{ converge (crt. rapporto)}$$

$\Rightarrow \textcircled{1}$ converge totalmente in $\mathbb{R}$. $\square$

Oss:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \overbrace{|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|}^{f_n(x)} \leq$$

$$|a_n \cos(nx)| + |b_n \sin(nx)| \leq$$

$$|a_n| + |b_n| \quad (=: M_n)$$

se $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ conv. assolutamente:

$$\sum_n (|a_n| + |b_n|) \text{ converge}$$

$\Rightarrow \sum_n f_n$ conv. totalm. in $\mathbb{R}$.

Verifico le formule di ortogonalità per cos.

$$n = m = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0x) \cos(0x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

$$n = m \neq 0:$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(2nx)}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi + \left[\frac{\sin(2nx)}{2 \cdot 2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$= 0$

$$n \neq m$$

$$m = 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot 1 \, dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$n \neq 0, m \neq 0:$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx =$$

$$\left[\frac{\sin(nx)}{n} \cos(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} (-m \sin(mx)) \, dx$$

$= 0$

$$= \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx$$

$$= \frac{1}{n} \left(\left[-\frac{\cos(nx)}{n} \sin(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n} (m \cos(mx)) \, dx \right)$$

0

$$= \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)}_{\neq 0} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx = 0$$

$n \neq m$
 $\frac{1}{n^2} \neq 1$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx = 0$$

□

Giustifico la definizione di a_0, a_n, b_n .

Suppongo che f sia la somma di una serie trigonometrica e che si possa integrare termine a termine (per esempio: f somma uniforme)

Esplícito:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) dx \\ &= a_0 2\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx}_{=0} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 2\pi \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Fisso $m \geq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \underbrace{\cos(mx)}_{=0} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) \cos(mx) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) \cos(mx) + b_n \sin(nx) \cos(mx)) dx$$

$$? \quad = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) \cos(mx) + b_n \sin(nx) \cos(mx)) dx$$

↑

$f_n \rightarrow f$ unif, h limitata

$$|f_n h - f h| = |f_n - f| |h| \leq C |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \sup_x |f_n h - f h| \leq C \sup_x |f_n - f|$$

$\downarrow$ $\Leftarrow$ $\downarrow$
 0 0

"?" ok! ($\cos(mx)$ è limitata)

Quindi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx}_{\substack{= 0 \quad n \neq m \\ = \pi \quad n = m}} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx}_{= 0} \right)$$

$$= a_m \pi$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

Analogamente per b_n .