17 ottobre 2024

Continuo l'osservazione su conv. uniforme e totale di serie di funzioni continue.

- $\sum_n f_n$ conv. totalmente in X $\overset{def}{\iff}$

$$\sum_n \sup_{x \in X} |f_n(x)|$$

- $\sum_n f_n$ conv. unif. in X $\overset{\text{considerazioni fatte}}{\iff}$

$$\lim_{m,n \to +\infty} \sup_{x \in X} |S_m(x) - S_n(x)| = 0$$

$:= f_0 + f_1 + \dots + f_n$

Dunque: se f_n è continua $\forall n$ (in un punto o in un insieme), la conv. totale e uniforme della serie di termine f_n coinvolge l'estremo superiore nell'insieme X di opportune funzioni continue

OSS: (M, d) sp. metrico

$A \subset M$ $\quad g: A \to \mathbb{R}$

$\bar{x} \in A \cap Dr(A)$, g continua in $\bar{x}$

Allora:

$$\underbrace{\sup_{x \in A} g(x)}_{=: \alpha} = \underbrace{\sup_{x \in A \setminus \{\bar{x}\}} g(x)}_{=: \beta}$$

$\bar{x} \in Dr(A) \implies \exists (x_n) \subset A \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $x_n \to \bar{x}$

$$g(\bar{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ continua} \\ \text{in } \bar{x}}}{=} \lim_{n \to +\infty} \underbrace{g(x_n)}_{\leq \beta \ \forall n} \leq \beta$$

$$\underline{\alpha} := \sup_{x\in A} g(x) = \max\Big\{ \underbrace{\sup_{x\in A\setminus\{\bar{x}\}} g(x)}_{=:\beta},\ \underbrace{g(\bar{x})}_{\leq\beta} \Big\} = \underline{\beta}$$

$\square$

Dunque: se $\bar{x} \in X \cap \mathrm{Dr}(X)$ e f_n è continua in $\bar{x}$ per ogni n, da quanto detto segue che:

- $\sum_n f_n$ conv. totalm. / unif. in X $\iff$

  $\sum_n f_n$ conv. totalm. / unif. in $X \setminus \{\bar{x}\}$

Stessa cosa per X e $X \setminus \{\underbrace{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k}_{}\}$

un numero finito di $X \cap \mathrm{Dr}(X)$

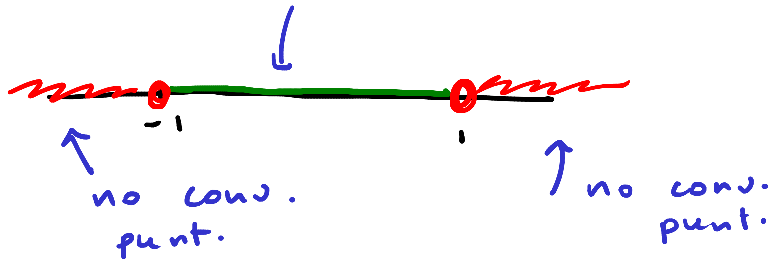
Riprendo l'esercizio: studio la serie di termine

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x^{2n})}{n+1}$$

$(f_n \geq 0)$

conv. punt. $\equiv$ conv. assol.

Già visto:



Devo decidere se $\sum_n f_n$ conv. unif. / totalm. in $(-1,1)$

Oss.: $\forall n$: f_n è continua in $\mathbb{R}$, quindi in $[-1,1]$

punti di accumulazione per $[-1,1]$

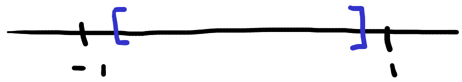
$$(-1,1) = [-1,1] \setminus \{-1, 1\}$$

Per quanto osservato: se la serie $\sum_n f_n$ convergesse totalm./unif. in $(-1,1)$, dovrebbe farlo anche in $[-1,1]$, il che non è possibile perché in -1 e 1 non converge assol./punt.

Pertanto: $\sum_n f_n$ non converge totalm./unif. in $(-1,1)$.

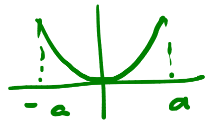
Per "recuperare" la conv. totale/unif. devo escludere un intorno di -1 e un intorno di 1

Fisso $0<a<1$ e considero $[-a,a]$



$\forall n: \sup_{[-a,a]} |f_n| = |f_n(a)|$

$f_n(x) = \frac{\ln(1+x^{2n})}{n+1}$

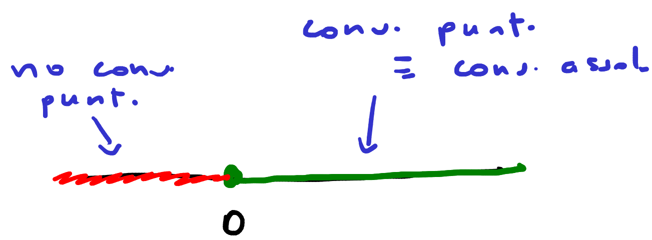


$\Rightarrow \sum_n \sup_{[-a,a]} |f_n| = \sum_n |f_n(a)|$ converge

$\in(-1,1)$

Conclusione: $\sum_n f_n$ conv. tot./unif in ogni intervallo $[-a,a]$, con $a\in(0,1)$. $\square$

- $f_n(x) = nxe^{-nx}$ $\quad x\in\mathbb{R}$



Già visto:

- $\sum_n f_n$ conv. punt. = assol. in $[0,+\infty)$
- $\sum_n f_n$ non conv. totalmente in $[0,+\infty)$

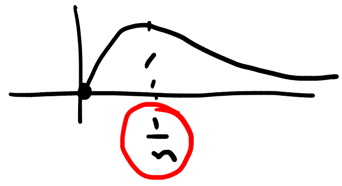
Oss: $\forall x<0$: $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nxe^{\overbrace{-nx}^{\to+\infty}} = \underbrace{-\infty}_{\neq 0}$

$\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ non converge

Studio conv. tot / unif. in $[0,+\infty)$

Già visto:

$$\sup_{[0,+\infty)} |f_n| = \left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| = n \frac{1}{n} e^{-n \cdot \frac{1}{n}}$$



$$= e^{-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,+\infty)} |f_n| = \lim_{n\to+\infty} e^{-1} = e^{-1} \neq 0$$

$\Rightarrow$ (f_n) non conv. unif a 0 in $[0,+\infty)$

$\Rightarrow$ $\sum_n f_n$ non conv. unif. in $[0,+\infty)$

($\Rightarrow$ $\sum_n f_n$ non conv. total. in $[0,+\infty)$)

Provo a "recuperare":

la "colpa" è di $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \to 0^+$ per $n \to +\infty$

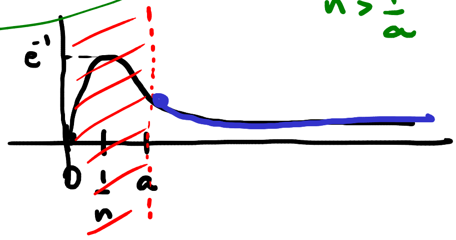
Quindi: escludo un intorno destro di $x=0$.

Fisso $a>0$ e restringo a $[a,+\infty)$:

per n suff. grande:

$$\sup_{[a,+\infty)} |f_n| = f_n(a)$$

$n > \frac{1}{a}$



Quindi: la serie di termine $\sup_{[a,+\infty)} |f_n|$ ha lo stesso carattere della serie di termine $f_n(a)$

$\sum_n f_n(a)$ converge (perché $a>0$)

$\Rightarrow$ $\sum_n \sup_{[a,+\infty)} |f_n|$ converge, cioè $\sum_n f_n$ conv. totalm. in $[a,+\infty)$ $\square$

- $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{n}{x^{2n}+1} \qquad x \in \mathbb{R}$

Per $|x| = 1$: $\quad |f_n(\pm 1)| = \left| (-1)^n \dfrac{n}{2} \right| = \dfrac{n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow f_n(\pm 1) \not\to 0$

$\Rightarrow \sum_n f_n(\pm 1)$ non converge

Per $|x| < 1$: $\quad |f_n(x)| = \dfrac{\overset{\to +\infty}{n}}{\underbrace{\underbrace{x^{2n}}_{\to 0} + 1}_{\to 1}} \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ non conv.

Per $|x| > 1$: $\quad |f_n(x)| = \dfrac{n}{\underbrace{x^{2n}}_{\to +\infty} + 1} \xrightarrow{\text{gerarchia infiniti}} 0$

$\Rightarrow$ la serie può convergere

Applico il crit. del rapporto:

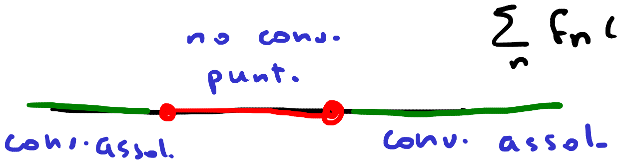
$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{n+1}{x^{2n+2}+1} \cdot \frac{x^{2n}+1}{n} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \cdot \frac{x^{2n}+1}{x^{2n+2}+1}$$

$$\sim \frac{x^{2n}+1}{x^{2n+2}+1} \sim \frac{x^{2n}}{x^{2n+2}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{1}{x^2} < 1 \qquad (|x| > 1)$$

Quindi: $\sum_n |f_n(x)|$ converge, cioè

$\sum_n f_n(x)$ conv. assolut.



Verifico se $\sum_n f_n$ conv. unif./tot. in

$$X = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$$

Oss: $\forall n$ f_n è continua in $\mathbb{R}$, quindi anche in $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

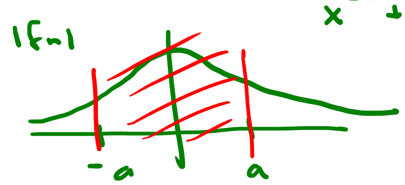
Per le considerazioni fatte in precedenza, dato che $\sum_n f_n$ non conv. in -1 e 1, non può conv. unif./tot. in X

Per recuperare, devo escludere intorni di -1 e di 1:

Fisso $a>1$ e considero $X_a = (-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$

Calcolo $\sup_{X_a} |f_n| = |f_n(a)|$

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{n}{x^{2n}+1}$$



$\sum_n |f_n(a)|$ converge perché $a>1$

Dunque: $\sum_n \sup_{X_a} |f_n|$ converge

cioè $\sum_n f_n$ conv. totalm. in X_a. $\square$

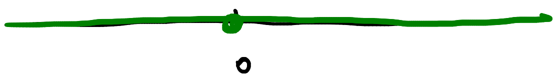
- $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1$

$f_n(0) = 0 \quad \forall n \Rightarrow \sum_n f_n(0)$ conv. (assol.)

$\forall x \neq 0$: $\quad |f_n(x)| = \dfrac{|x|}{x^2+n^2} \sim |x| \cdot \dfrac{1}{n^2}$

$$\sum_n \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \underset{\text{mult.}}{\Rightarrow} \sum_n |x| \cdot \frac{1}{n^2} \text{ conv.}$$

conv. assol.

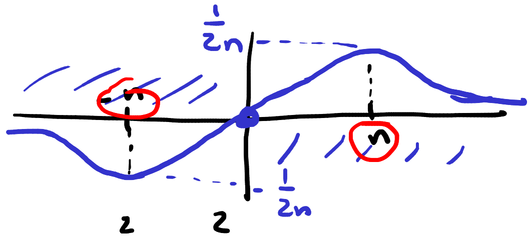


$\overset{\text{confr. asint.}}{\Rightarrow} \sum_n |f_n(x)|$ conv.

Dunque: $\sum_n f_n$ conv. assol. in $\mathbb{R}$.

Verifico se $\sum_n f_n$ conv. tot./unif. in $\mathbb{R}$

$f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$



$f_n'(x) = \dfrac{x^2+n^2 - x \cdot 2x}{(x^2+n^2)^2} = \dfrac{n^2 - x^2}{(\quad)^2} \geq 0 \iff |x| \leq n$

$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = f_n(n) = \dfrac{n}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{2n}$

- $\lim_n \sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \lim_n \dfrac{1}{2n} = 0$

$\Rightarrow$ $f_n \to 0$ unif. in $\mathbb{R}$ — cond. necess. per la conv. unif. di $\sum_n f_n$

$\Rightarrow \sum_n f_n$ potrebbe convergere unif. in $\mathbb{R}$

- $\sum_n \sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \sum_n \dfrac{1}{2n}$ non converge

$\Rightarrow \sum_n f_n$ non conv. totalm. in $\mathbb{R}$

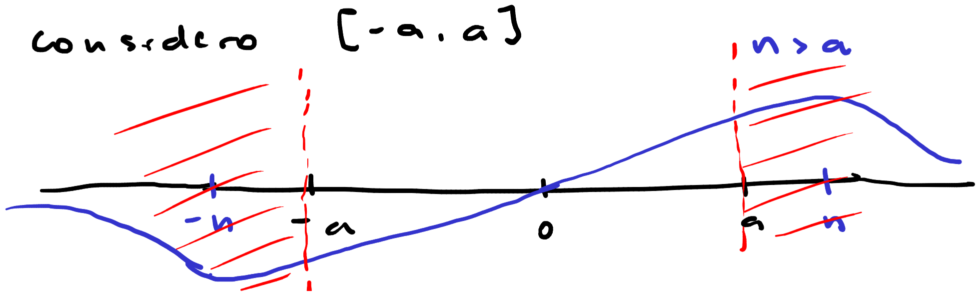
Provo a recuperare la conv. totale.

La "colpa" è di $\pm n$, $\pm n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, quindi:
escludo intorni di $-\infty$ e $+\infty$.

Fisso $a > 0$ e considero $[-a, a]$

Per $n > a$:

$\sup_{[-a,a]} |f_n| = |f_n(a)|$

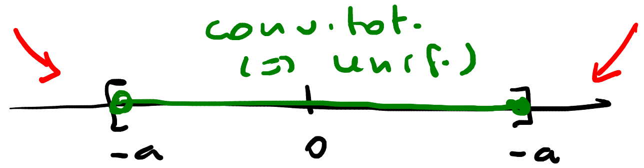


$\Rightarrow \sum_n \sup_{[-a,a]} |f_n|$ e $\sum_n |f_n(a)|$ hanno lo stesso carattere

$\sum_n |f_n(a)|$ converge (perché $\sum_n f_n$ conv. assol. ovunque, dunque in a)

$\Rightarrow \sum_n \sup_{[-a,a]} |f_n|$ converge, cioè:

$\sum_n f_n$ conv. totalm. in $[-a,a]$ $(\forall a>0)$



Provo a capire se in $[a,+\infty)$ (o $(-\infty,a]$) ci sia conv. uniforme.

Ricordo che:

$\sum_n f_n$ conv. unif. in $[a,+\infty)$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{m,n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty)} |S_m(x)-S_n(x)| = 0 \quad (*)$$

Oss:

$$(*) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty)} |S_{2n}(x)-S_n(x)| = 0 \quad (**)$$

Verifico che $(**)$ non è soddisfatta.

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |S_{2n}(x)-S_n(x)| \underset{n\geq a}{\geq} |S_{2n}(n)-S_n(n)|$$

$$= \overbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{f_k(n)}_{\geq 0}}^{\geq 0}$$

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

$$f_k(x) = \frac{x}{x^2+k^2}$$

$$f_k(n) = \frac{n}{n^2+k^2}$$

$$\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+(2n)^2}$$

$$= n \cdot \frac{n}{n^2+4n^2} = \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5}$$

Quindi: $\forall n \geq a$:

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |S_{2n}(x) - S_n(x)| \geq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sup_{[a,+\infty)} |S_{2n} - S_n| \not\to 0 \qquad \square$$

- $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1$

$\forall n$: $f_n(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_n f_n(0)$ conv. assol.

$0 < |x| < 1$:

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$$

$\sum_n |x|^n$ conv. (geom. con $q = |x| \in (0,1)$)

$\overset{\text{confr.}}{\Rightarrow} \quad \sum_n |f_n(x)|$ converge

$|x| = 1$: $x = 1$ e $x = -1$

$x = 1$: $f_n(1) = (-1)^n \frac{1}{n}$, $\quad \sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ conv. per crit. Leibniz

$x = -1$: $\sum_n f_n(-1) = \sum_n (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_n \frac{1}{n}$ non conv.

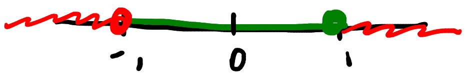
Oss: in $x=1$ la serie converge ma non conv. assol.

$|x|>1$: $\quad |f_n(x)| = \dfrac{\overbrace{|x|^n}^{\to +\infty}}{\underbrace{n}_{\to +\infty}} \longrightarrow +\infty$ $\quad$ gerarchia infiniti

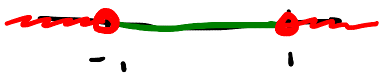
$\Rightarrow f_n(x) \not\to 0$

$\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ non converge

conv. punt.



conv. assol.



Potrebbe esserci conv. unif. in $(-1,1]$, tot. in $(-1,1)$

Oss: non può esserci conv. tot. in $(-1,1)$, altrimenti (essendo f_n continua in $[-1,1]$) ci sarebbe conv. tot. in $[-1,1]$, il che implicherebbe conv. assol. in $[-1,1]$, falso!

Verifico se $\sum_n f_n$ conv. tot. in $[-a,a]$, con $0<a<1$.

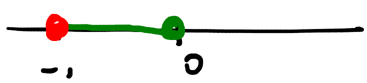
$$\sup_{[-a,a]} |f_n| = \sup_{x\in[-a,a]} \frac{|x|^n}{n} = \frac{a^n}{n}$$

$\sum_n \dfrac{a^n}{n}$ converge $\quad \Rightarrow \sum_n \sup_{[-a,a]} |f_n|$ converge

$\Rightarrow \sum_n f_n$ conv. tot. in $[-a,a]$.

Per la conv. uniforme, decompongo $(-1,1]$ nella unione di $(-1,0]$ e $[0,1]$

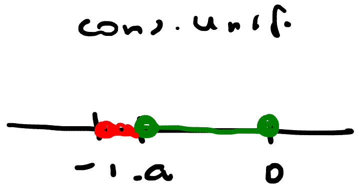
conv. punt.



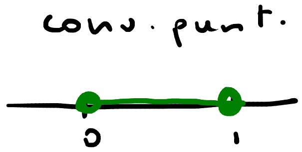
Per la "solita" considerazione,

se la serie conv. unif. in $(-1,0]$, dovrebbe farlo anche in $[-1,0]$, il che non è.

Quindi: in $(-1,0]$ non c'è conv. unif.;
in $[-a,0]$ $(0<a<1)$ c'è conv. tot. (già visto)
e quindi uniforme.



Rimane da esaminare $[0,1]$.



$\Rightarrow$ non ci sono ostacoli alla conv. unif. in tutto $[0,1]$

$$\forall x \in [0,1]: \quad f_n(x) = (-1)^n \underbrace{\frac{x^n}{n}}_{\geq 0} =: g_n(x)$$

Verifico se f_n soddisfa punt. in $[0,1]$ le ipotesi del crit. di Leibniz:

- $\lim_n \frac{\overbrace{x^n}^{\leq 1}}{\underbrace{n}_{\to +\infty}} = 0$ ✓

- $g_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \overset{?}{\leq} \frac{x^n}{n} =: g_n(x)$ vero per $x=0$

$$\Updownarrow \quad x \neq 0$$

$$\frac{x}{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{x}_{\leq 1} \leq \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{>1}$$

vero!

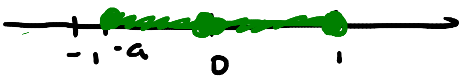
Sono sodd. le ipotesi, quindi per questa serie la cond. necess. per la conv. unif. è anche sufficiente.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|x|^n}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cond. nec. ✓ $\iff$ cond. suff. ✓

$\implies \sum_n f_n$ conv. unif. in $[0,1]$

conv. unif.



$[-a,1]$, $a\in(0,1)$.

$\square$