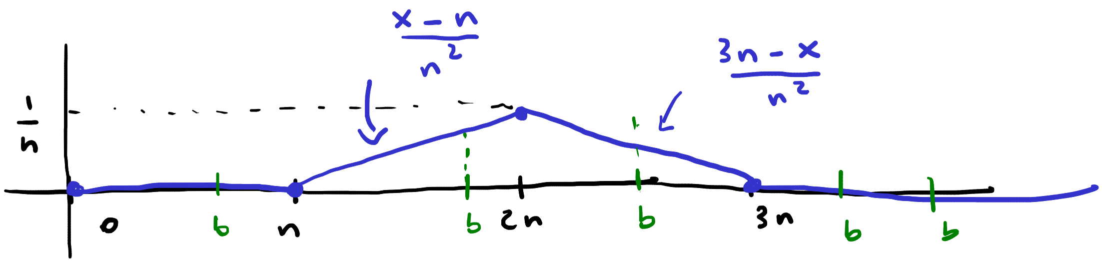
8 ottobre 2024

Esempio (che mostra che il TPLSSI **non** si estende a integrali generalizzati su interv. illimitati)



$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,n] \cup [3n,+\infty) \\ \frac{x-n}{n^2} & x \in (n,2n] \\ \frac{3n-x}{n^2} & x \in (2n,3n) \end{cases}$$

$\forall n$: f_n continua, $f_n \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f_n(x)\,dx = 2n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ f_n è integr. in senso generalizzato in $[0,+\infty)$

Fissato x : d'ora in poi $n > x$ $\Rightarrow$
$\in [0,+\infty)$

$x \in [0,n]$ $\Rightarrow$

$f_n(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$$

Funzione limite puntuale: $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ t.c.
$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,+\infty)$

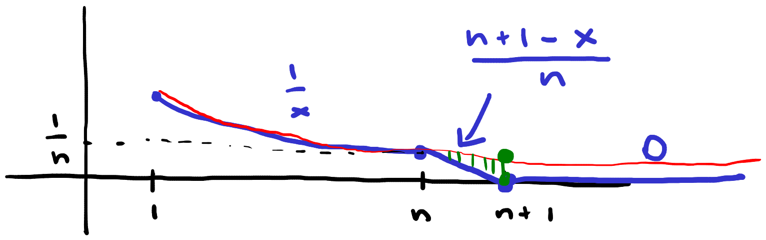
La convergenza è uniforme perché

$$\sup_{[0,+\infty)} |\underbrace{f_n}_{\geq 0} - \underbrace{f}_{=0}| = \sup_{[0,+\infty)} f_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Osservo che f è banalmente integr. in senso gener. in $[0,+\infty)$, però:

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{\equiv 0}\,dx = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx}_{=1 \quad \forall n.}$$

Es (funz. limite non integrabile in senso generalizzato)



limite puntuale:

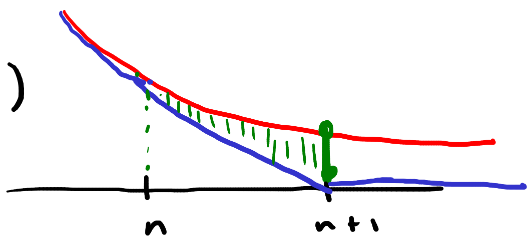
$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in [1,+\infty)$

NON integr. in senso generalizzato sebbene:

① $\forall n$: f_n è integr. in senso gener.;

② $\sup_{[1,+\infty)} |f_n - f| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(cioè: $f_n \to f$ unif. in $[0,+\infty)$)



Es: utilizzo TPLSSI per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-nx^2}+n}{3n+1}\,dx$$

Definisco $f_n(x) := \frac{e^{-nx^2}+n}{3n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$ (basterebbe $x \in [0,\pi]$)

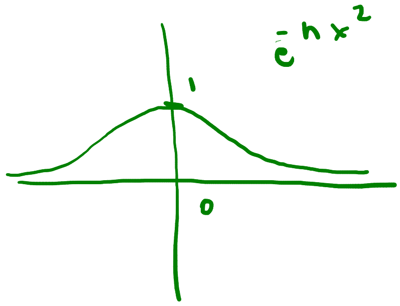
Fisso $x \in \mathbb{R}$; $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-nx^2}+n}{3n+1} = \frac{1}{3} =: f(x)$

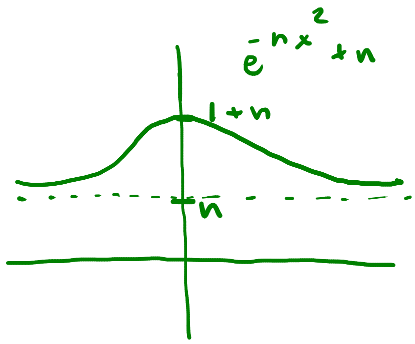
$$\left(\begin{array}{l} f_n(0) = \dfrac{1+n}{3n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3} \\[2ex] x \neq 0: \quad f_n(x) = \dfrac{e^{\overbrace{-nx^2}^{\to 0}}+n}{3n+1} \sim \dfrac{n}{3n+1} \longrightarrow \dfrac{1}{3} \end{array} \right)$$

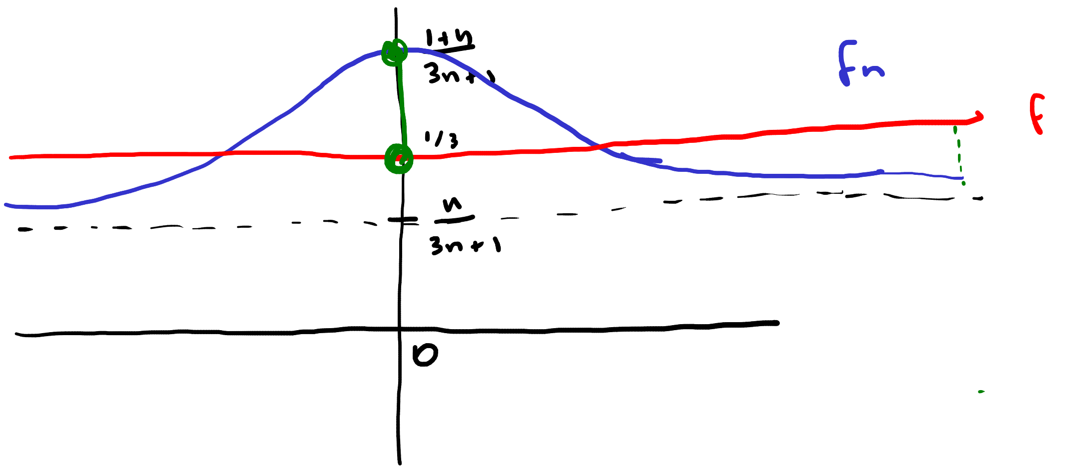
Limite puntuale: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = \frac{1}{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fissato n:

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f|$$







$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \max \left\{ |f_n(0) - f(0)|, \lim_{x\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| \right\}$$

$$= \max \left\{ \left(\frac{1+n}{3n+1} - \frac{1}{3}\right), \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1}}_{} \right\}$$

$$\frac{1+n}{3n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3+3n-3n-1}{3(3n+1)} = \frac{2}{3(3n+1)} > \frac{1}{3(3n+1)} = \frac{3n+1-3n}{3(3n+1)} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1}$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \frac{2}{3(3n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

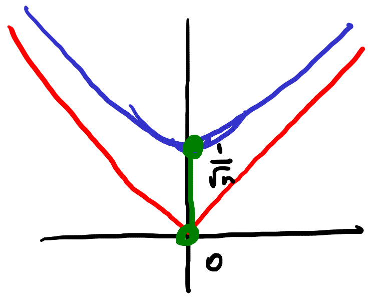
Dunque: $f_n \to f$ unif. in $\mathbb{R}$;

di conseguenza: $f_n \to f$ unif. in $[0,\pi]$

TPLSSI

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{3} \qquad \square$$

<u>Es.</u> (che mostrano che la conv. unif. non basta a "trasportare" la derivabilità)



- $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad x \in \mathbb{R}$

$\forall n$: f_n è di classe C^1 in $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\underbrace{x^2+\frac{1}{n}}_{\to x^2}} = \sqrt{x^2} = \underbrace{|x|}_{} =: f(x)$$

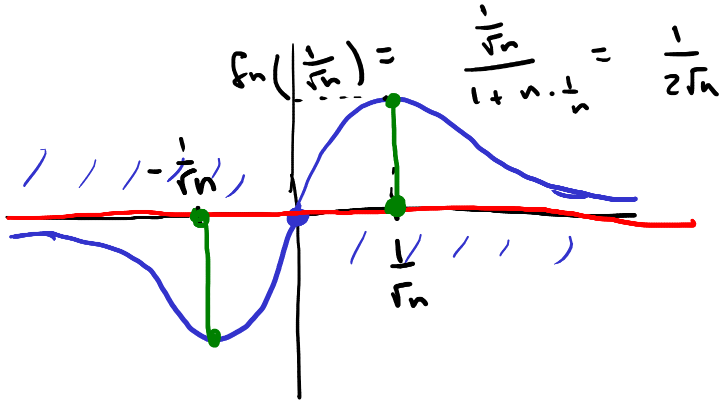
non è deriv. in $x=0$!

Tuttavia:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

cioè: $f_n \to f$ <u>unif.</u> in $\mathbb{R}$.

- $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$



$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2}$$

$$= \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

$$f_n'(x) \geq 0 \iff nx^2 \leq 1 \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Studio la convergenza di (f_n):

$$\forall n: \ f_n(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 =: f(0)$$

se $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{x}^{\text{cost.}}}{\underbrace{1+nx^2}_{\to+\infty}} = 0 =: f(x)$$

Quindi: (f_n) conv. puntualm. a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

t.c. $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

$\Rightarrow (f_n)$ conv. a f __unif.__ in $\mathbb{R}$.

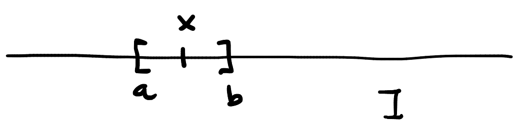
Osservo che f è derivabile con

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Però:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Dimostro il TPLSSD



Fisso $x \in I$:

$\exists a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $x \in [a,b] \subset I$

Per l'ipotesi (ii), la succ (f_n') converge uniforme mente in $[a,b]$; in particolare, converge in x, quindi posso porre $g(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$

Siccome x è un arbitrario elemento di I, ho dimostrato che esiste $g: I \to \mathbb{R}$ limite puntuale di (f_n').

Osservo che (per unicità del limite), g è anche limite uniforme di (f_n') in ogni compatto contenuto in I.

Verifico che g è continua in I.

Fisso $x \in I$; come prima, considero a, b t.c. $x \in [a,b] \subset I$. Siccome $\forall n$: f_n' è continua in I e perciò anche in $[a,b]$, e (f_n') converge a g unif. in $[a,b]$, deduco che g è continua in $[a,b]$. In particolare: g è continua in x. $\square$

Poniamo $\ell := \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$.

Fisso n; osservo che f_n' è continua (per ipotesi). Applico la FFCI e ottengo che $\forall x \in I$:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_0)$$

cioè:

$$\forall x \in I: \qquad f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$$

Fisso $x \in I$. Osservo che:

- $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (per definizione di ℓ)

$$\cdot \quad \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

(f_n') converge unif. a g in ogni compatto contenuto in I, quindi anche nell'intervallo chiuso di estremi x_0 e x, dunque in tale intervallo posso applicare il TPLSSI

Dunque, posto $f(x) := \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \forall x \in I$, ho dimostrato che

$\forall x \in I: \ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, cioè che

(f_n) converge a f puntualmente in I.

Osservo che:

$$g \text{ continua} \Rightarrow \underbrace{x \in I \longmapsto \overbrace{\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}^{\text{funzione integrale di } g \text{ di punto iniziale } x_0}}_{(*)} \text{ è una}$$

funzione derivabile con derivata uguale a g, cioè: è una primitiva di g in I.

Dato che f è la somma di $(*)$ e della costante ℓ, deduco che anche f è una primitiva di g in I, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \text{ è derivabile in } I \\ \cdot\ f' = g,\ g \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow f \in C^1(I, \mathbb{R})$$

Inoltre:

$$\forall x \in I: \quad f'(x) = g(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

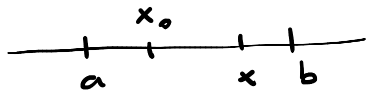
Resta da dimostrare che (f_n) converge a f uniformemente nei sottointervalli compatti di I.

Fisso $[a,b] \subset I$; senza perdere di generalità posso supporre $x_0 \in [a,b]$.

Devo dimostrare che (f_n) converge a f unif. in $[a,b]$, cioè:

$$\sup_{[a,b]} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Fisso $x \in [a,b]$ e calcolo:



$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \left(\ell + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right) \right|$$

$$= \left| f_n(x_0) - \ell + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right|$$

$$\leq |f_n(x_0) - \ell| + \underbrace{\left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right|}_{\odot}$$

$$\odot = \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))\,dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f_n'(t) - g(t)|}_{\leq \sup_{[a,b]} |f_n' - g|}\,dt \right|$$

$\in [a,b]$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{\sup_{[a,b]} |f_n' - g|}_{\text{costante}}\,dt \right|$$

$$= \left| \sup_{[a,b]} |f_n' - g|\,(x - x_0) \right| = \sup_{[a,b]} |f_n' - g|\,|x - x_0|$$

$$\leq \sup_{[a,b]} |f_n' - g|\,(b-a)$$

Ricapitolando:

$$\forall x \in [a,b]: \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_0) - \ell| + \sup_{[a,b]} |f_n' - g|\,(b-a)}_{\text{NON dipende da } x}$$

Perciò: $\forall n$:

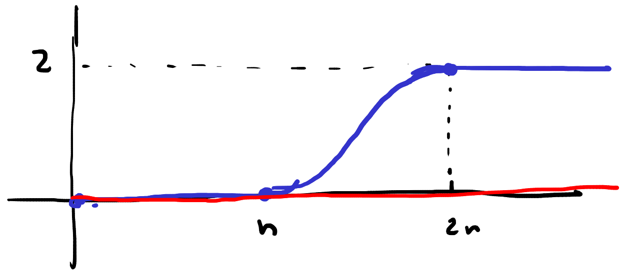
$$0 \le \sup_{[a,b]} |f_n - f| \le \underbrace{|f_n(x_0) - \ell|}_{\downarrow\, 0} + \overbrace{\underbrace{\sup_{[a,b]} |f_n' - g|}_{\downarrow\, 0}\,(b-a)}^{\to 0}$$

$\downarrow$ 0   per $n \to +\infty$

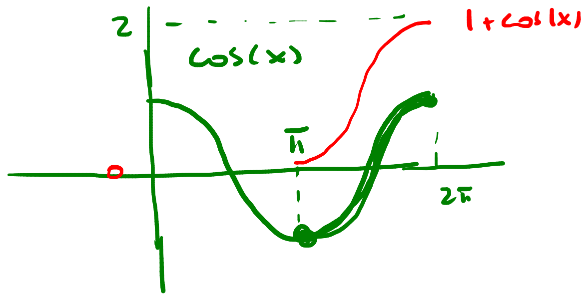
TCO $\Rightarrow$ $\sup_{[a,b]} |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\square$

Es. ("rafforzare" l'ipotesi non "rafforza" la tesi)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, n] \\ 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{n}\right) & x \in (n, 2n) \\ 2 & x \in [2n, +\infty) \end{cases}$$



$n < x < 2n$ $\pi < \frac{x\pi}{n} < 2\pi$



$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, n] \\ -\frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{\pi x}{n}\right) & x \in (n, 2n) \\ 0 & x \in [2n, +\infty) \end{cases}$$

$\nwarrow$ analogamente

$\lim_{x \to n^-} f_n'(x) = \lim_{x \to n^-} 0 = 0$

$=$

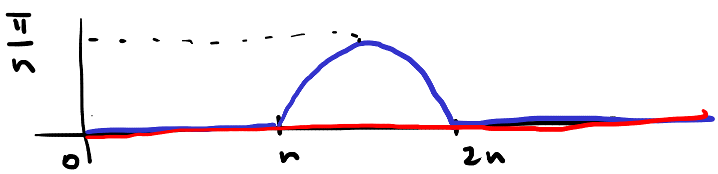
$\lim_{x \to n^+} f_n'(x) = \lim_{x \to n^+} \left(-\frac{\pi}{n} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi x}{n}\right)}_{\to 0}\right) = 0$ ($\frac{\pi x}{n} \to \pi$)

$\Rightarrow$ conseg. del teor. di Lagrange $\exists f_n'(n) = 0$

Dunque: f_n' è continua in $[0, +\infty)$, cioè:

f_n è di classe C^1 in $[0, +\infty)$.

Rappresento f_n':



Oss: (f_n') tende

puntualmente a $g \equiv 0$.

Inoltre: $\sup_{[0,+\infty)} |f_n' - g| = \sup_{[0,+\infty)} f_n' = \frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

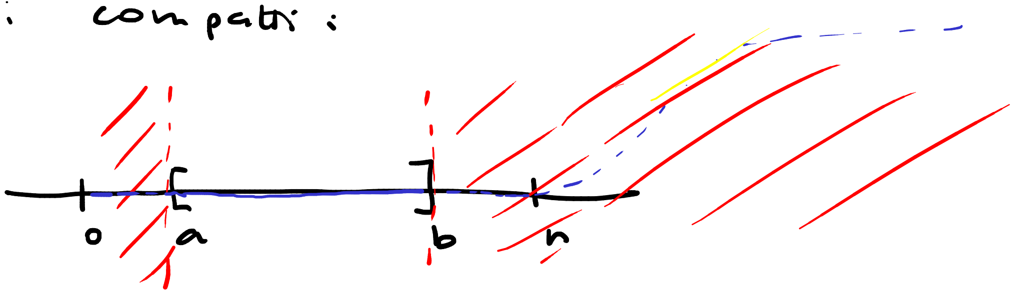
Quindi: $f_n' \to 0$ unif. in $[0,+\infty)$

Ma: $f_n \to 0$ punt. in $[0,+\infty)$ e però

$$\sup_{[0,+\infty)} |f_n - 0| = \sup_{[0,+\infty)} f_n = 2 \not\to 0$$

cioè: (f_n) non conv. unif. in $[0,+\infty)$

Controllo (è superfluo!) che $f_n \to 0$ unif. nei compatti:



$$\sup_{[a,b]} |f_n - 0| = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \square$$