Dimostro il teor. delle contrazioni

Comincio con dimostrare l'esistenza di un punto fisso.

Scelgo $x_0 \in X$. Pongo $x_1 := f(x_0)$ e $\delta := d(x_1, x_0)$

Se $\delta = 0$: $d(x_1, x_0) = 0 \iff x_1 = x_0 \iff f(x_0) = x_0$

$\Rightarrow x_0$ è punto fisso.

Se $\delta > 0$: costruisco una successione di elementi di X ponendo

$$x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad \dots, \quad x_n = f(x_{n-1}), \quad \dots$$

Osservo che:

definizione di x_2 e x_1 — f contrazione

$$\underline{d(x_2, x_1)} = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha\, d(x_1, x_0) = \underline{\alpha\,\delta} \quad \odot$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha\, d(x_2, x_1) \overset{\odot}{\leq} \alpha\,\alpha\,\delta = \alpha^2 \delta$$

$\vdots$

$$d(x_k, x_{k-1}) \leq \alpha^{k-1}\delta \quad \forall k \geq 1 \quad (*)$$

Fisso $n, m \in \mathbb{N}$, con $m > n$:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\overset{(*)}{\leq} \alpha^{m-1}\delta + \alpha^{m-2}\delta + \dots + \alpha^n \delta$$

$$= \alpha^n \delta \, \underbrace{(\alpha^{m-n-1} + \alpha^{m-n-2} + \dots + \alpha + 1)}$$

somma parziale della serie geometrica di ragione $\alpha \in (0,1)$, quindi convergente; la somma parziale è maggiorata dalla somma

(perché è una serie a termini positivi)

$$\leq \alpha^n \delta \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad q \in (-1,1) \right]$$

Ricapitolando:

$$\forall n, m, \quad m > n : \quad 0 \leq d(x_m, x_n) \leq \alpha^n \frac{\delta}{1-\alpha}$$

Per $n \to +\infty$:

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \alpha^n \to 0 \Rightarrow \alpha^n \frac{\delta}{1-\alpha} \to 0$$

$$\overset{TCO}{\Rightarrow} \quad d(x_m, x_n) \longrightarrow 0$$

Dunque: (x_n) è una successione di Cauchy nello spazio metrico (X, d), che per ipotesi è completo.

Pertanto: (x_n) converge in (X, d), cioè: esiste $x \in X$ t.c. $d(x_n, x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Verifico che x è punto fisso di f. Osservo che

$$\forall n: \quad x_n = f(x_{n-1})$$

Per $n \to +\infty$:

$$x_n \to x$$

$$x_{n-1} \to x \quad \text{(estratta da } (x_n))$$

$$\overset{f \text{ continua}}{\Rightarrow} \quad f(x_{n-1}) \to f(x)$$

Per unicità del limite: $x = f(x)$ $\square$

Dimostro che x è l'unico punto fisso di f in X.

Infatti: suppongo che $\tilde{x} \in X$ e $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$

Valuto:

$$d(\tilde{x}, x) \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{x},\, x \\ \text{punti fissi}}}{=} d(f(\tilde{x}), f(x)) \leq \alpha\, d(\tilde{x}, x)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(1-\alpha)}_{>0}\, d(\tilde{x}, x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{d(\tilde{x}, x)}_{\geq 0} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(\tilde{x}, x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{x} = x$$

L'unicità è provata. $\square$

Verifico che d_∞ è ben posta, cioè che

$$\forall f, g \in B(X, Y): \qquad \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) < +\infty$$

$$(\Leftrightarrow \in \mathbb{R})$$

$f, g \in B(X, Y) \Rightarrow$

$$\exists r' > 0 \;\; \exists y' \in Y \;\; \text{t.c.} \;\; \forall x \in X: \; d_Y(f(x), y') < r'$$

$$\exists r'' > 0 \;\; \exists y'' \in Y \;\; \text{t.c.} \;\; \forall x \in X: \; d_Y(g(x), y'') < r''$$

Allora $\forall x \in X$:

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq \underbrace{d_Y(f(x), y')}_{<r'} + d_Y(y', y'') + \underbrace{d_Y(y'', g(x))}_{<r''}$$

$$< \underbrace{r' + d_Y(y', y'') + r''}_{\in \mathbb{R}}$$

Dunque:

la funzione $x \in X \mapsto d_Y(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}$,

è limitata superiormente, pertanto il suo estremo superiore è un numero. $\square$

Verifico che d_∞ è una metrica:

- $f, g \in B(X, Y)$

$$d_\infty(f, g) = 0 \overset{def}{\iff} \sup_{x \in X} \underbrace{d_Y(f(x), g(x))}_{\geq 0} = 0$$

$$\iff \forall x \in X : d_Y(f(x), g(x)) = 0$$

$$\overset{d_Y \text{ è metrica}}{\iff} \forall x \in X : f(x) = g(x) \iff f = g.$$

- (D2) segue immediatamente dalla simmetria di d_Y.

- $f, g, h \in B(X, Y)$

$\forall x \in X$:

$$d_Y(f(x), g(x)) \overset{(D3) \text{ di } d_Y}{\leq} d_Y(f(x), h(x)) + d_Y(h(x), g(x))$$

$$\leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$$

Dunque: $d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$ è un maggiorante della funzione

$$x \in X \mapsto d_Y(f(x), g(x))$$

Pertanto: $d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$. $\square$

Verifico che in $(C([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$ la palla chiusa di centro la funzione costante di valore 0 e raggio 1 non è un insieme compatto.

funzione costante di valore 0

$$B := \overline{B}_1(0) = \{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid d_\infty(f,0) \leq 1 \}$$

zero di $\mathbb{R}$

$$= \{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - 0| \leq 1 \}$$

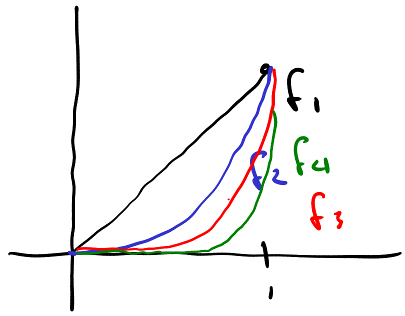
$$= \{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1 \}$$

Esibisco una successione di elementi di B che non ammette estratte convergenti nella metrica d_∞.

$\forall n \geq 1$: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n(x) = x^n$

$\forall n$: f_n è continua

$\forall n$: $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1$



$\Rightarrow$ $\forall n$: $f_n \in B$

Suppongo per assurdo che esista $(k_n) \subset \mathbb{N}$ strett. crescente tale che (f_{k_n}) converge in B rispetto alla metrica d_∞, cioè:

$$\exists f \in B \quad \text{t.c.} \quad d_\infty(f_{k_n}, f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \odot$$

$f \in B \Rightarrow f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è <u>continua</u>

Osservo che:

$$\forall x \in [0,1]: \; 0 \le |f_{k_n}(x) - f(x)| \le \underbrace{d_\infty(f_{k_n}, f)}_{\to 0} \quad \text{per } \odot$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1]: \; |f_{k_n}(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1]: \; f(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f_{k_n}(x)}_{\in \mathbb{R}}$$

Ma: $\forall x \in [0,1]$, $(f_{k_n}(x))$ è estratta da $(f_n(x))$

cioè da (x^n) e

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Per unicità del limite:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

in contrasto col fatto che f è continua! $\square$

Dimostro che $(C_b(X,Y), d_\infty)$ è completo se (Y, d_Y) lo è

Oss: (Y, d_Y) completo $\overset{\text{teor. preced.}}{\Longrightarrow}$ $(B(X,Y), d_\infty)$ è completo.

Per la prop. su "chiusura e completezza", per dimostrare che $(C_b(X,Y), d_\infty)$ è completo mi basta dimostrare che $C_b(X,Y)$ è un sottoinsieme chiuso di $B(X,Y)$.

Per la caratterizzazione sequenziale della chiusura, devo dimostrare che:

$\forall (f_n) \subset C_b(X,Y)$ t.c. (f_n) converge a f in $(B(X,Y), d_\infty)$, risulta: $f \in C_b(X,Y)$.

Sia $(f_n) \subset C_b(X,Y)$ t.c. (f_n) converge a f in $(B(X,Y), d_\infty)$.

Esplicitando:

- $\forall n$: f_n è limitata e continua
- f è limitata
- $\underbrace{d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ $\odot$

Devo dimostrare che $f \in C_b(X,Y)$, cioè che f è limitata e continua.

Devo quindi dimostrare che f è continua.

Fisso $\bar{x} \in X$.

Fisso $\varepsilon > 0$.

$\odot \Rightarrow$ In corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{3}$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \geq \nu: \quad d_\infty(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

In particolare: $d_\infty(f_\nu, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ ①

Per ipotesi, f_ν è continua in X, quindi in $\bar{x}$.
In corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{3}$ esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\forall x \in X: \quad d_X(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f_\nu(x), f_\nu(\bar{x})) < \frac{\varepsilon}{3} \quad ②$$

Osservo che $\forall x \in X$ con $d_X(x,\bar{x}) < \delta$:

$$d_Y(f(x), f(\bar{x})) \leq \underbrace{d_Y(f(x), f_\nu(x))}_{\leq\, d_\infty(f, f_\nu) \,<\, \frac{\varepsilon}{3} \ (1)} + \underbrace{d_Y(f_\nu(x), f_\nu(\bar{x}))}_{<\, \frac{\varepsilon}{3} \ (2) \ + \ d_X(x,\bar{x}) < \delta} + \underbrace{d_Y(f_\nu(\bar{x}), f(\bar{x}))}_{\leq\, d_\infty(f_\nu, f) \,<\, \frac{\varepsilon}{3} \ (1)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Le parti sottolineate provano che f è continua in $\bar{x}$.

Dato che $\bar{x}$ è un arbitrario punto di X, concludo che f è continua in X. $\square$