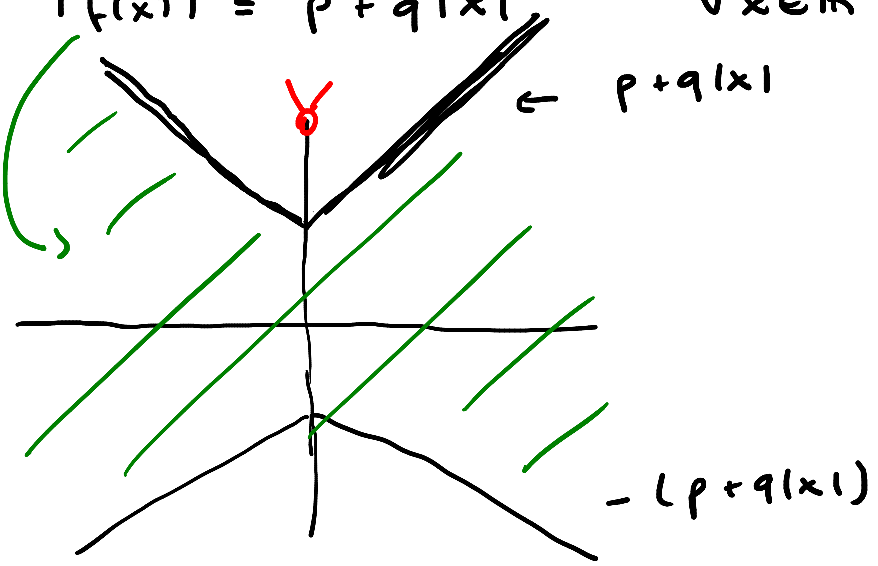
7 dicembre 2023

$n=1$: $\quad f=f(x) \quad \exists\, p,q>0$ t.c.

$$|f(x)| \le p+q|x| \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

??



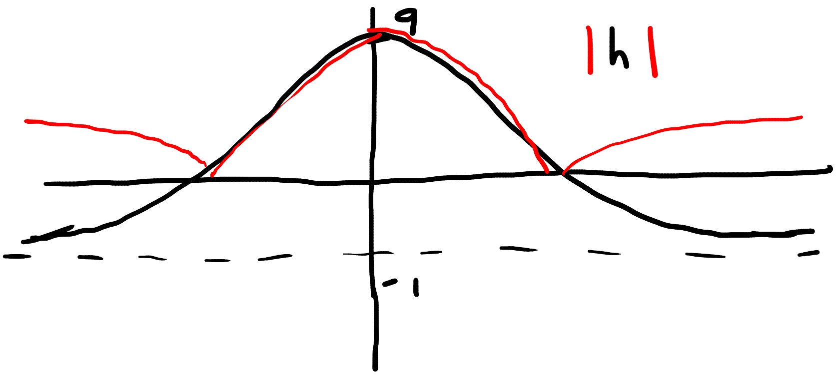
Es: $\quad f(t,x) = t\,\dfrac{9-x^2}{x^2+1} \qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Fisso $K\subset\mathbb{R}$ intervallo compatto $\Rightarrow K=[a,b]$

$\forall (t,x)\in[a.b]\times\mathbb{R}$:

$$|f(t,x)| \le \underbrace{\max\{|a|,|b|\}\cdot 9}_{=:p} \le p+|x| \qquad q:=1$$

$h(x) := \dfrac{9-x^2}{x^2+1}$



Suppongo f continua e lipschitziana:

$\exists\, L>0$ t.c. $\forall t\in I$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \|_{\mathbb{R}^n} \le L \, \| x - y \|_{\mathbb{R}^n}$$

$\Rightarrow \quad \forall t \in I, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n:$

$$\| f(t,x) \|_{\mathbb{R}^n} = \| f(t,x) - f(t,0) + f(t,0) \|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\le \| f(t,0) \|_{\mathbb{R}^n} + \| f(t,x) - f(t,0) \|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\le \| f(t,0) \|_{\mathbb{R}^n} + L \, \| x \|_{\mathbb{R}^n}$$

Fisso $K \subset I$ compatto; $\forall (t,x) \in K \times \mathbb{R}^n$:

$$\| f(t,x) \|_{\mathbb{R}^n} \le \| f(t,0) \|_{\mathbb{R}^n} + L \, \| x \|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\le \underbrace{\max_{t \in K} \| f(t,0) \|_{\mathbb{R}^n}}_{=:\,p} + \underbrace{L}_{=:\,q} \, \| x \|_{\mathbb{R}^n}$$

esiste perché K è compatto e $t \in K \mapsto \| f(t,0) \|_{\mathbb{R}^n}$ è continua

$$\big| |a| - |b| \big| \le |a - b|$$

Es: $f(t,x) = t \, |x - 1| \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$| f(t,x) - f(t,y) | = | t \, |x-1| - t \, |y-1| |$$

$$= |t| \, \big| |x-1| - |y-1| \big|$$

$$\le |t| \, |x - y|$$

$$\le L \, |x - y|$$ se t varia in un compatto.

$\square$

Es: $f(t,x) = \arctan(t^2 + x^2)$

sublineare (perché limitata)

$\underline{\text{Oss}}$: suppongo f sublineare $\Rightarrow$

$\forall K \subset I$ compatto $\exists\, p, q > 0$ t.c.

$\forall t \in K, \forall x \in \mathbb{R}^n$: $\quad \|f(t,x)\| \leq p + q\|x\|$

Fisso $t \in K$: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \left(\frac{p}{\|x\|} + q\right) \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} q$$

limitato $\Leftarrow$ limitata $\Leftarrow$

$\underline{\text{Es}}$: $f(t,x) = t \dfrac{x^4}{x^2+1}$

Prendo $t = 1$: $\quad \dfrac{|f(1,x)|}{|x|} = \dfrac{x^4}{x^2+1} \cdot \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{|x|^3}{x^2+1} \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow f$ $\underline{\text{non}}$ è sublineare

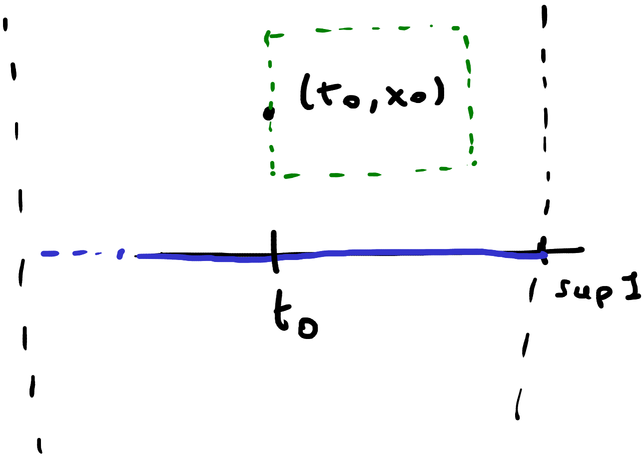
Dimostro il TEUG.

Fisso $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$

Suppongo $t_0 < \sup I$ e dimostro che $(P) \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

ha un'unica soluzione definita in $I \cap [t_0, +\infty[$.

(in modo analogo si procede se $t_0 > \inf I$).



Applico il TEUL "a destra":

$\exists\, \delta_0 > 0$ t.c. (P) ha

un'unica soluzione φ

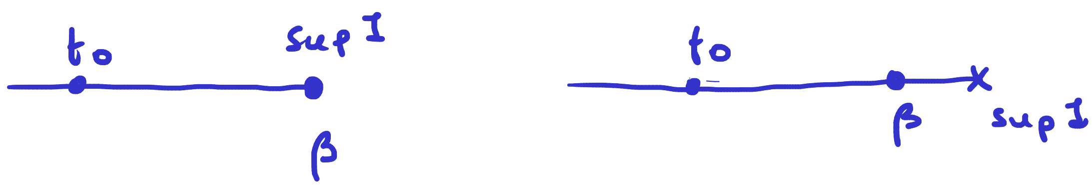
in $[t_0, t_0 + \delta_0]$

Devo dimostrare che φ ammette un prolungamento definito in $I \cap [t_0, +\infty[$

l'unicità deriva dal teorema "unicità globale in ipotesi di EUL"

Osservo che mi basta dimostrare che φ ammette un prolungamento definito in $[t_0, \beta]$ dove

- $\beta = \sup I$ se $\sup I \in I$
- β è un arbitrario elemento di $]t_0, \sup I[$ se $\sup I \notin I$.

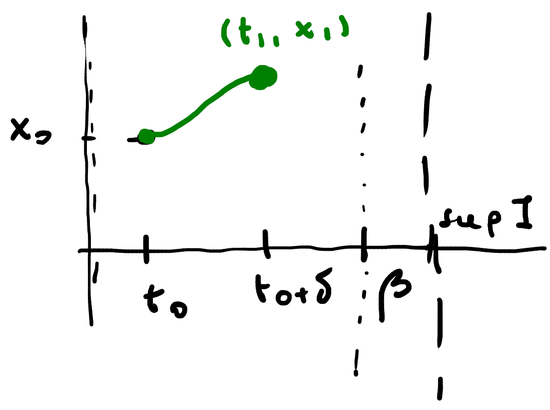


Se $t_0 + \delta_0 \geq \beta$, non ho nulla da dimostrare.

Se $t_0 + \delta_0 < \beta$, definisco

$t_1 := t_0 + \delta_0, \quad x_1 := \varphi(t_1)$

e osservo che (t_1, x_1) è interno a $\Omega := I \times \mathbb{R}^n$



Considero allora (P_1) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_1) = x_1 \end{cases}$

Per il TEUL "a destra":
esiste $\delta_1 > 0$ t.c. (P_1) ha un'unica sol. ψ definita in $[t_1, t_1 + \delta_1]$.

Osservo che $\varphi(t_1) = x_1 = \psi(t_1)$, quindi:
"incollando" φ e ψ ottengo un prolungamento di φ definito in $[t_0, t_1 + \delta_1]$.

Denoto questo prolungamento ancora con φ.

Se $t_1 + \delta_1 \geq \beta$, ho finito.

Se $t_1 + \delta_1 < \beta$, pongo $\begin{cases} t_2 := t_1 + \delta_1 \ (= t_0 + \delta_0 + \delta_1), \\ x_2 = \varphi(t_2) \end{cases}$

e considero (P_2) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_2) = x_2 \end{cases}$

Risolvo, "incollo" e ottengo un prolungamento definito in $[t_0, t_2 + \delta_2]$

$\vdots$ Itero il procedimento ...

Dopo aver risolto il k-esimo problema di Cauchy aggiuntivo, ho un prolungamento di φ definito in $[t_0, \underbrace{t_0 + \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{k-1}}_{=: t_k} + \delta_k]$

Ricordiamo che abbiamo posto $x_k := \varphi(t_k)$

Ricordo dal TEUL "a destra" che per costruzione

$$\delta_k := \min \left\{ a_k, \frac{b_k}{M_k} \right\}$$

dove

- $a_k, b_k > 0$ sono soggetti all'unica condizione

$$\Gamma_k^+ := [t_k, t_k + a_k] \times \bar{B}_{b_k}(x_k) \subset \underset{I \times \mathbb{R}^n}{\underset{\shortparallel}{\Omega}}$$

- $M_k := \max\limits_{(t,x) \in \Gamma_k^+} \| f(t,x) \|$

Scelgo

$$a_k := \beta - t_k$$

In questo modo: $\quad t_k + a_k = \beta$

$$\Rightarrow \quad [t_k, t_k + a_k] = [t_k, \beta] \subset I \qquad \checkmark$$

Osservo che b_k può essere scelto in modo totalmente arbitrario, perché la condizione $\quad \bar{B}_{b_k}(x_k) \subset \mathbb{R}^n$

è banalmente soddisfatta.

Dato che f è sublineare, in corrispondenza del compatto $[t_0, \beta]$ (contenuto in I) esistono $p, q > 0$ t.c.

$$\forall (t,x) \in [t_0, \beta] \times \mathbb{R}^n : \quad \| f(t,x) \| \le p + q \| x \|$$

Scelgo $\quad b_k := p + q \| x_k \| \quad (> 0)$

Osservo che $\forall\ (t,x) \in \Gamma_k^+ = [\underbrace{t_k, t_k + \overset{\beta}{a_k}}_{\subset [t_0, \beta]}] \times \bar{B}_{b_k}(x_k)$

$$\|f(t,x)\| \overset{\text{sublin.}}{\leq} p + q\|x\| = p + q\|x - x_k + x_k\|$$

$$\leq p + q\|x - x_k\| + q\|x_k\|$$

$$= q\underbrace{\|x - x_k\|}_{\leq b_k} + \underbrace{p + q\|x_k\|}_{=:\, b_k}$$

$$\leq q b_k + b_k = (1+q) b_k$$

$$\Rightarrow \quad M_k \leq (1+q) b_k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{b_k}{M_k} \geq \frac{1}{1+q}}$$

NON DIPENDE DA k!

Definisco $m := \lfloor (\beta - t_0)(1+q) \rfloor$ parte intera inferiore

Affermo che risolvendo al più m PdC aggiuntivi: ottengo un prolungamento di φ definito (almeno) in $[t_0, \beta]$

Distinguo due casi.

1° caso: $\exists\ k \in \{0, \dots, m\}$ t.c. $\delta_k = a_k$

$\Rightarrow$ la soluzione è definita fino a $t_k + \delta_k = t_k + a_k = t_k + (\beta - t_k) = \beta$

$\Rightarrow$ Termino in k passi, con $k \leq m$.

2° caso: $\forall\ k \in \{0, \dots, m\}$: $\delta_k = \dfrac{b_k}{M_k}$

$\Rightarrow$ dopo aver eseguito il passo m-esimo
la soluzione è definita fino a

$$t_m + \delta_m = t_0 + \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{m-1} + \delta_m$$

$$= t_0 + \frac{b_0}{M_0} + \frac{b_1}{M_1} + \dots + \frac{b_{m-1}}{M_{m-1}} + \frac{b_m}{M_m}$$

$$\geq t_0 + \underbrace{\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+1}}_{m+1}$$

$$= t_0 + (m+1) \cdot \frac{1}{q+1}$$

$$\geq t_0 + (\beta - t_0)\cancel{(q+1)} \frac{1}{\cancel{q+1}}$$

$$= t_0 + \beta - t_0 = \beta$$

$\square$

Es.

- $y' = \arcsin(t)\,|y-1| \qquad \Omega = \underbrace{[-1,1]}_{I} \times \mathbb{R}$

$f(t,x) = \arcsin(t)\,|x-1|$

- f continua ✓
- f lipsch. risp. a x unif. in t $\Rightarrow$ loc. lip.

$\Downarrow$

sublin.

$\Rightarrow$ TEUG è applicabile

$\Rightarrow$ tutte le sol. massimali sono globali
cioè in $[-1,1]$.

- $y' = \dfrac{y^3}{(t^2+1)(y^2+1)} =: f(t,y)$ $\qquad \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ✓

$f \in C^1(\Omega) \Rightarrow$ cont.; loc. lip. risp. a x unif. in t

$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$|f(t,x)| = \underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+1}}_{\leq 1} |x| \leq |x| \leq \underbrace{1}_{p} + \underset{\uparrow}{|x|} \quad q = 1$$

$\Rightarrow f$ è sublineare

$\Rightarrow$ TEUG applicabile $\Rightarrow$ sol. massim. definite in $\mathbb{R}$

- $y' = \dfrac{y^3}{t(y^2+1)}$ $\qquad \Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$\underbrace{]-\infty, 0[\times \mathbb{R}}_{✓} \qquad \underbrace{]0, +\infty[\times \mathbb{R}}_{✓}$

f continua e loc. lip. ✓

$$|f(t,y)| \leq \frac{1}{|t|} |y|$$

$\frac{1}{|t|} \to +\infty$ se $t \to 0$

Se considero $[a,b] \subset]0, +\infty[$:

$$|f(t,y)| \leq \underbrace{\frac{1}{a}}_{=: q} |y| \qquad p = 1$$

$\Rightarrow$ in $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sono soddisfatte tutte le ipotesi del TEUG

$\Rightarrow$ le sol. massimali sono definite in $]0,+\infty[$

Analogamente, assegnando l'eq. diff. in $]-\infty,0[\times\mathbb{R}$, si ottiene che le sol. massimali sono definite in $]-\infty,0[$.

Es:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 + \frac{1}{k} \end{cases}$$

$(f_k = f)$

$t_k = \bar{t} = 0$

$x_k = 1 + \frac{1}{k} \downarrow 1 = \bar{x}$

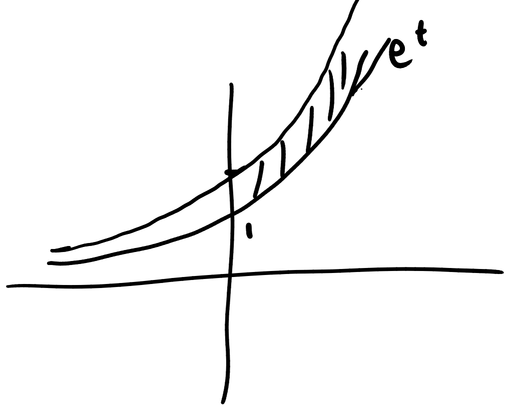
$$\varphi(t) = e^t \qquad\qquad \varphi_k(t) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)e^t$$

$\forall t \in \mathbb{R}$: $\varphi_k(t) \to \varphi(t)$

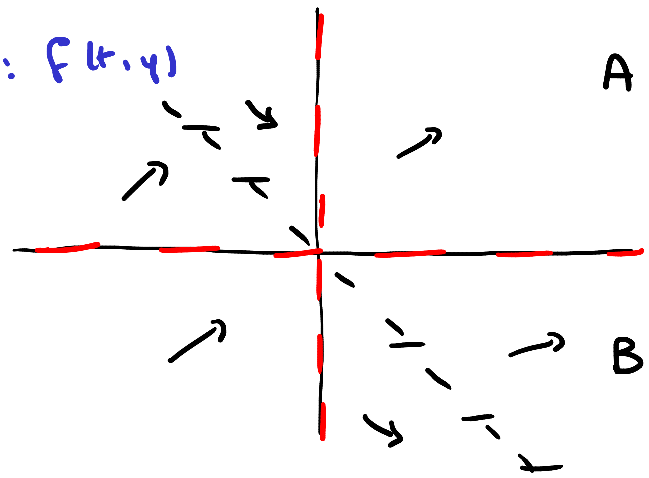
Però:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\left(1+\frac{1}{k}\right)e^t - e^t\right|$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{k} e^t = +\infty \not\to 0.$$



Riprendo $y' = \dfrac{t^3+y^3}{t\,y^2} =: f(t,y)$



$\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) \Rightarrow$ TEUL ✓

$f(t,y) = 0 \iff t^3+y^3 = 0$

$\iff y = -t$ zero-clina

Monotonia: vedi figura

Asintoti: suppongo $\varphi : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ soluzione

$\overset{\text{monot}}{\Longrightarrow} \quad \exists \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) =: \alpha$

Suppongo $\alpha \in \mathbb{R}$. Per $t \to +\infty$:

$$\varphi'(t) = \frac{t^3 + \varphi(t)^3}{t\,\varphi(t)^2} = \underbrace{\frac{t^2}{\underbrace{\varphi(t)^2}_{\to \alpha^2}}}_{\to +\infty} + \frac{\overset{\to \alpha}{\varphi(t)}}{t} \to 0$$

$\to +\infty$ per qualsiasi α!

$\Rightarrow \alpha$ non può essere un numero reale

$\Rightarrow$ • le soluzioni in A, se sono definite in interv. illimit. superiormente, devono tendere a $+\infty$

• le soluzioni in B non possono essere definite in intervalli illimitati superiormente.

Nella lezione scorsa abbiamo risolto l'eq. trovando

$(*)\quad \varphi_c(t) = t\sqrt[3]{\ln|t| + c} \qquad c \in \mathbb{R}$

Condizioni : $\quad t \neq 0$

$$(t, \varphi_c(t)) \in \Omega \implies \varphi_c(t) \neq 0$$

$$\ln|t| + c \neq 0$$

$$\ln|t| \neq -c \iff |t| \neq e^{-c} =: t_c$$

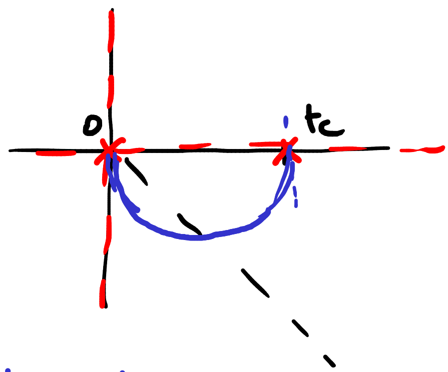
$-t_c \qquad 0 \qquad t_c$

Ci sono quattro famiglie di soluzioni, tutte definite da $(*)$ in

$]-\infty, -t_c[, \quad]-t_c, 0[, \quad \underline{]0, t_c[}, \quad \underline{]t_c, +\infty[}$

rispettivamente.

$$\underbrace{\varphi_c(t)}_{<0} = t\sqrt[3]{\underbrace{\ln(t) + c}_{<0}} \qquad t \in]0, t_c[$$



$\varphi_c(0^+) = 0$

$\forall t \in]0, t_c[$:

$t \to 0^+$

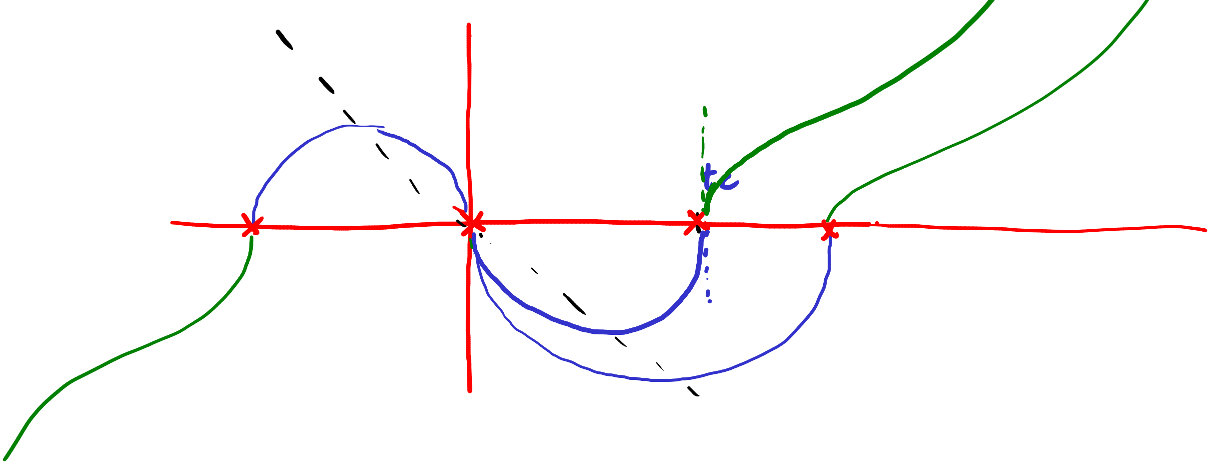
$$\varphi_c'(t) = \frac{t^3 + t^3(\ln(t) + c)}{t \cdot t^2 (\ln|t| + c)^{2/3}} = \frac{1 + \overbrace{\ln(t) + c}^{\to -\infty}}{(\underbrace{\ln(t) + c}_{\to -\infty})^{2/3}} \to -\infty$$

$\varphi_c(t_c^-) = 0 \qquad \varphi_c'(t_c^-) = +\infty$

$$\varphi_c(t) = t\sqrt[3]{\ln(t) + c} \qquad t \in \left]t_c, +\infty\right[$$

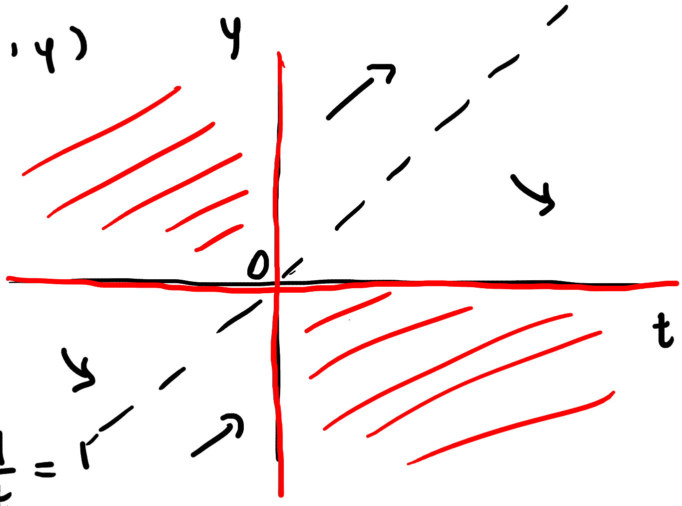
$$\varphi_c(t_c^+) = 0 \quad , \quad \varphi_c'(t_c^+) = +\infty$$

$$\varphi_c(+\infty) = +\infty \qquad (\text{più che lineare})$$



$$y' = \frac{y}{t}\ln\left(\frac{y}{t}\right) =: f(t,y)$$

$f \in C^1 \implies$ TEUL $\checkmark$



$f(t,y) = 0 \iff$

$$\ln\left(\frac{y}{t}\right) = 0 \iff \frac{y}{t} = 1$$

$y = t$ zero-clina

Monotonia?

$$f(t,y) > 0 \iff \ln\left(\frac{y}{t}\right) > 0 \iff \frac{y}{t} > 1$$

$$\begin{cases} t > 0 \\ y > t \end{cases} \quad \text{opp.} \quad \begin{cases} t < 0 \\ y < t \end{cases}$$

Asintoti? Nessuna informazione! DA CONTINUARE