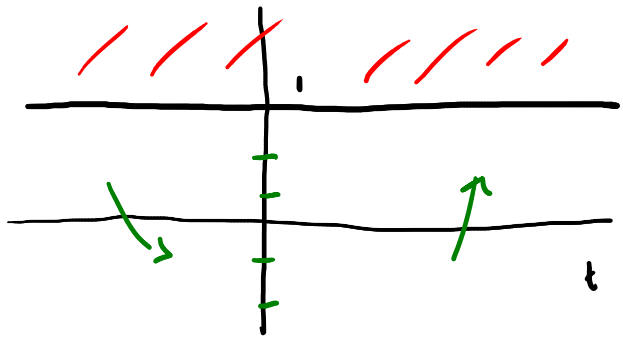
Riprendo $y' = \underbrace{2t\sqrt{(1-y)^3}}_{=: f(t,y)}$



Discuto i possibili asintoti orizzontali:

Suppongo $\varphi : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ sol.

Per la monotonia: $\exists \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) =: \alpha \leq 1$

non $-\infty$ per monotonia

struttura di: dom(f)

Valuto

$$\varphi'(t) = \underbrace{2t}_{\to +\infty} \underbrace{\sqrt{(1-\varphi(t))^3}}_{\to \sqrt{(1-\alpha)^3}}$$

Se $\alpha < 1$: $\varphi'(t) \to +\infty$, assurdo!

Quindi: l'unico possibile valore perché $y = \alpha$ sia asintoto orizzontale è $\alpha = 1$.

Analogamente per eventuali soluz. definite in intervalli illimitati inferiormente.

Cerco soluzioni non costanti:

- cerco H t.c. $H'(y) = (1-y)^{-3/2}$

  scelgo $H(y) = +2(1-y)^{-1/2}$

- cerco G t.c. $G'(t) = 2t$

  scelgo $G(t) = t^2$

Quindi: $y = y(t)$ è sol. se

$$2(1-y(t))^{-\frac{1}{2}} = t^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(1-y(t))^{-\frac{1}{2}} = \frac{t^2+c}{2}$$

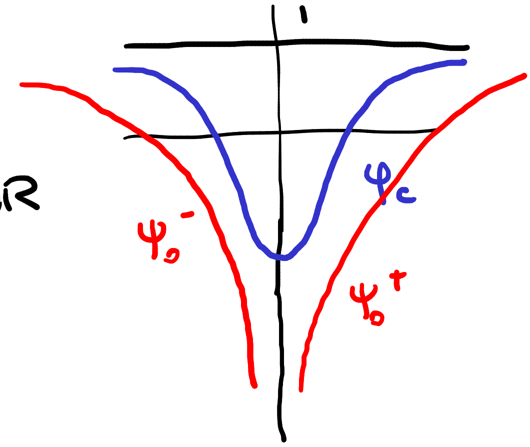
ha senso se

$$1-\varphi(t) = \frac{4}{(t^2+c)^2}$$

$$\frac{t^2+c}{2} > 0 \quad (*)$$

$$\psi_c(t) = 1 - \frac{4}{(t^2+c)^2}$$

$$\cancel{t^2+c \neq 0 \quad (*)}$$



Se $c > 0$: $(*)$ vera $\forall t \in \mathbb{R}$

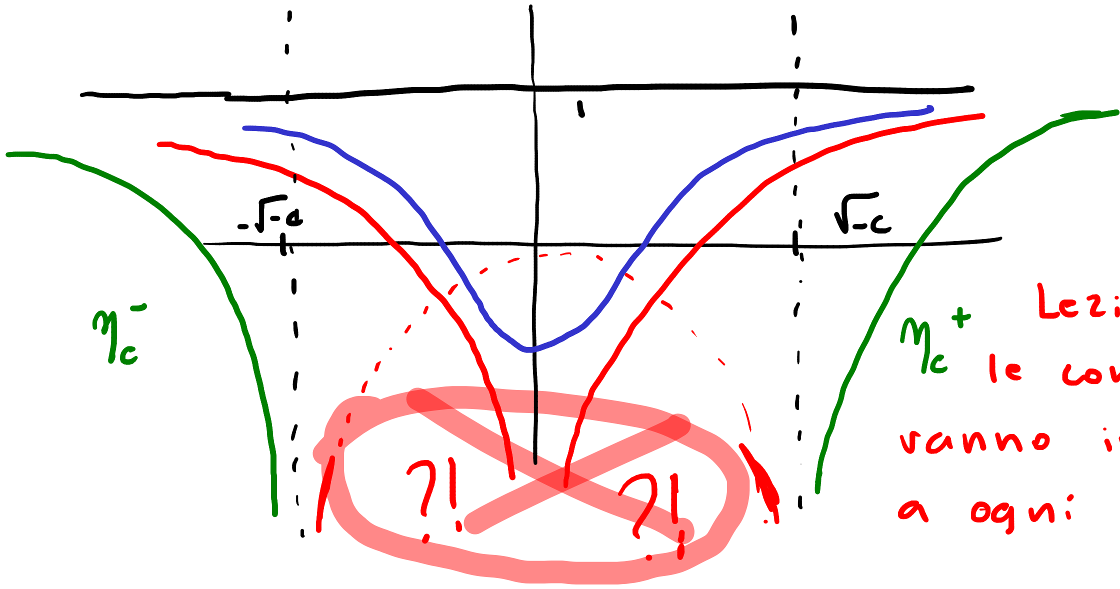
$\Rightarrow \quad \varphi_c(t) = \psi_c(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

Se $c = 0$: $(*)$ vera $\Leftrightarrow t \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \varphi_0^-(t) = 1 - \dfrac{4}{t^4} & t \in\,]-\infty, 0[\\ \varphi_0^+(t) = 1 - \dfrac{4}{t^4} & t \in\,]0, +\infty[\end{array}$$

Se $c < 0$: $(*)$ vera $\Leftrightarrow$ $\cancel{t \neq \pm\sqrt{-c}}$ $|t| > \sqrt{-c}$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \eta_c^-(t) = \psi_c(t) & t \in\,]-\infty, -\sqrt{-c}[\\ \cancel{\eta_c^0(t) = \psi_c(t)} & \cancel{t \in\,]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}[} \\ \eta_c^+(t) = \psi_c(t) & t \in\,]\sqrt{-c}, +\infty[\end{array}$$



Lezione:
le condizioni
vanno imposte
a ogni passo!

$$y' = \underbrace{2t}_{g(t)} \underbrace{\sqrt{1-y}}_{h(y)} =: f(t,y)$$

come nell'es. precedente

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \times]-\infty, 1]$$

TEUL applicabile in $\mathbb{R} \times]-\infty,1[$, cioè:

$\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times]-\infty,1[$ $\exists !$ soluz. locale del PdC di condizione iniziale $y(t_0) = x_0$

Inoltre: grafici di sol. distinte non si intersecano in alcun punto di $\mathbb{R} \times]-\infty,1[$

Dato che h non è lipschitziana in alcun intorno (sinistro) di $y=1$, non è garantita unicità per PdC di condizione iniziale
$$y(t_0) = 1.$$

(e i grafici di sol. distinte potrebbero intersecarsi in punti con ordinata 1)

Sol. costanti, monotonia, zero-clina e possibili asintoti orizzontali: come nell' es. precedente.

Cerco sol. non costanti. (per valori di t in cui sono diverse da 1)

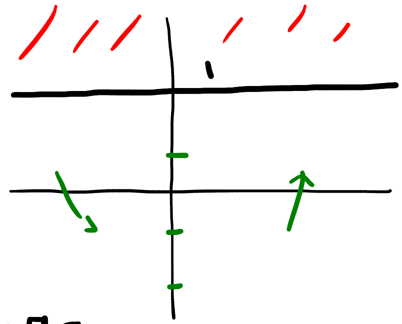
$H'(y) = (1-y)^{-\frac{1}{2}}$; scelgo $H(y) = -2(1-y)^{1/2}$

$G'(t) = 2t$; scelgo $G(t) = t^2$

$y = y(t)$ sol. se

$$-2(1-y(t))^{1/2} = t^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{(1-y(t))^{1/2}}_{>0} = -\frac{t^2+c}{2}$$



Condizione : $t^2+c<0$ (*)

Se $c \geq 0$: (*) non è mai soddisfatta

$\Rightarrow$ non ci sono sol. corrispondenti

Se $c<0$: (*) soddisfatta $\Leftrightarrow t \in \left]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\right[$

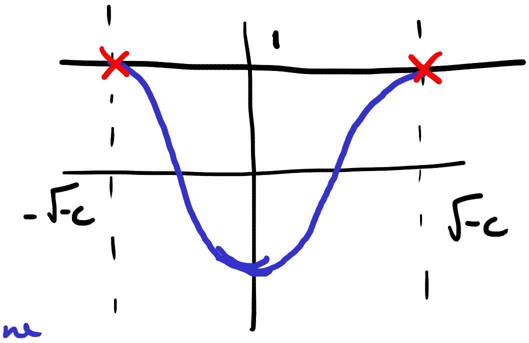
$$\Rightarrow \quad 1-y(t) = \frac{(t^2+c)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad y_c(t) = 1-\frac{(t^2+c)^2}{4}, \quad t \in \left]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\right[$$

$$\lim_{t\to\sqrt{-c}} y_c(t) = 1$$

$$\lim_{t\to\sqrt{-c}} y_c'(t) = 0$$

$\uparrow$ dall'equazione



Giustifico l' "incollamento".

Devo verificare due cose:

- η è derivabile in $t=\alpha$ (a sinistra e a destra lo è perché coincide con φ e ψ, rispett., soluzioni)

- $\eta'(\alpha) = f(\alpha, \eta(\alpha))$

η è continua in α per costruzione, quindi:

per dimostrare che è derivabile in α,

posso utilizzare la conseguenza del teor. di

Lagrange:

$$\lim_{t\to\alpha^-} \eta'(t) \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to\alpha^-} \varphi'(t) \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to\alpha^-} \underbrace{f(t, \varphi(t))}_{\to f(\alpha,\beta)}$$

$t \nearrow \alpha$, $\varphi(t) \nearrow \beta$ (per ipotesi)

$\eta|_{]\inf I, \alpha[} \equiv \varphi$ — φ sol. dell'eq. diff. — $\uparrow$ f continua

$$= f(\alpha, \beta) \;=$$

$$\lim_{t\to\alpha^+} \eta'(t) \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to\alpha^+} \psi'(t) \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to\alpha^+} f(t, \psi(t)) \underset{\uparrow}{=} f(\alpha, \beta)$$

$t \nearrow \alpha$, $\psi(t) \nearrow \beta$

$\eta|_{]\alpha, \sup I[} \equiv \psi$ — ψ sol. dell'eq. — continua

$$\Rightarrow \quad \underline{\exists\, \eta'(\alpha)} = f(\alpha, \beta) \underset{\uparrow}{=} \underline{f(\alpha, \eta(\alpha))}$$

$\eta(\alpha) = \beta$ per costruzione

Applicando l'osservazione, posso costruire una nuova soluz. dell'eq. $y' = 2t\sqrt{1-y}$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \in \,]-\infty, -\sqrt{-c}\,] \\ 1 - \dfrac{(t^2+c)^2}{4} & t \in \,]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\,[\\ 1 & t \in [\sqrt{-c}, +\infty[\end{cases}$$

$\uparrow$ "globale"

$\square$

Giustifico la cond. suff. per prolungabilità

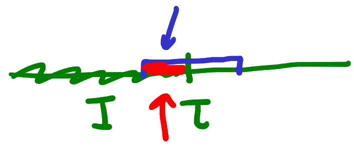
Suppongo: $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ sol. di $y' = \underset{\uparrow \\ \text{"buona"}}{f}(t,y)$

- $\tau := \sup I \in \mathbb{R}$
- $\exists \lim_{t \to \tau^-} \varphi(t) =: \xi$
- $(\tau, \xi) \in \mathrm{int}(\Omega)$

Considero (PdC) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$

TEUL $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ t.c. (PdC) ha una unica soluz. ψ definita in $[\tau - \delta, \tau + \delta]$

"Incollo" φ e ψ:



$$\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in I \setminus \{\tau\} \\ \psi(t) & t \in [\tau, \tau + \delta] \end{cases}$$

$\varphi \equiv \psi$

Per l'oss. sull'incollamento: η è sol. dell'eq. diff., che prolunga φ perché η è definita in $I \cup [\tau, \tau + \delta]$

$$y' = \overbrace{\underbrace{t}_{g(t)} \; \underbrace{\frac{9 - y^2}{y^2 + 1}}_{h(y)}}^{f(t,y)}$$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ TEUL si applica per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sol. costanti e zero-cline:

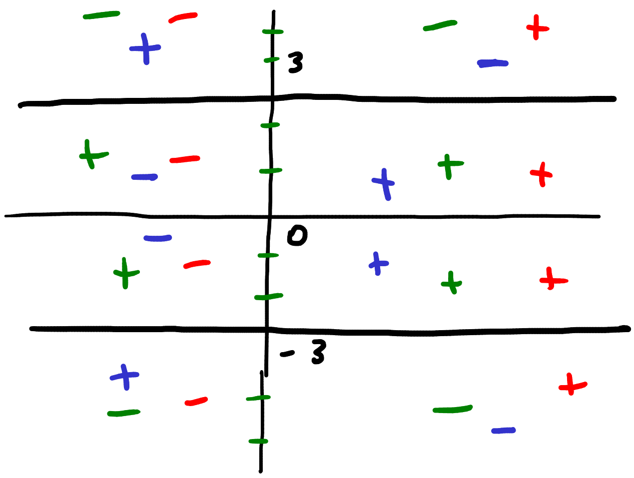
$$f(t,y)=0 \iff t\,\frac{9-y^2}{y^2+1}=0 \iff$$

$$t=0 \quad \text{opp.} \quad 9-y^2=0$$

$\uparrow$ zero-clina

cioè: $\underbrace{y=\pm 3}_{\text{sol. costanti}}$

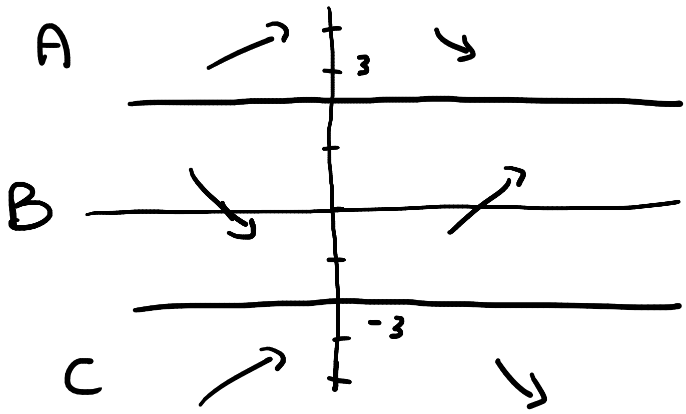
Monotonia:



$$f(t,y)>0 \iff$$

$$t\,\frac{9-y^2}{\underbrace{y^2+1}_{>0}}>0$$

f



Possibili asintoti?

$\varphi :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ sol dell' eq:

$$\Rightarrow \exists \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \alpha$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$: $$|\varphi'(t)| = \left|\underbrace{t}_{\to +\infty}\;\frac{9-\varphi(t)^2}{\varphi(t)^2+1}\right| \longrightarrow +\infty \quad !!!$$

$\frac{9-\alpha^2}{\alpha^2+1}\in\mathbb{R}$

se $9-\alpha^2\neq 0$

Gli unici valori possibili sono $\alpha=3$ e $\underbrace{\alpha=-3}_{\text{escluso per monotonia}}$.

Idem per $t\to-\infty$

Per le osservazioni fatte, le

soluzioni con valori compresi tra -3 e 3 sono tutte definite in $]-\infty, +\infty[$.

Cerco le sol. non costanti

$$H'(y) = \frac{y^2+1}{9-y^2} = -\frac{y^2+1}{y^2-9} = -\frac{y^2-9+10}{y^2-9}$$

$$= -1 - \frac{10}{y^2-9} = -1 - \frac{10}{6}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y+3}\right)$$

$$= -1 - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y+3}\right)$$

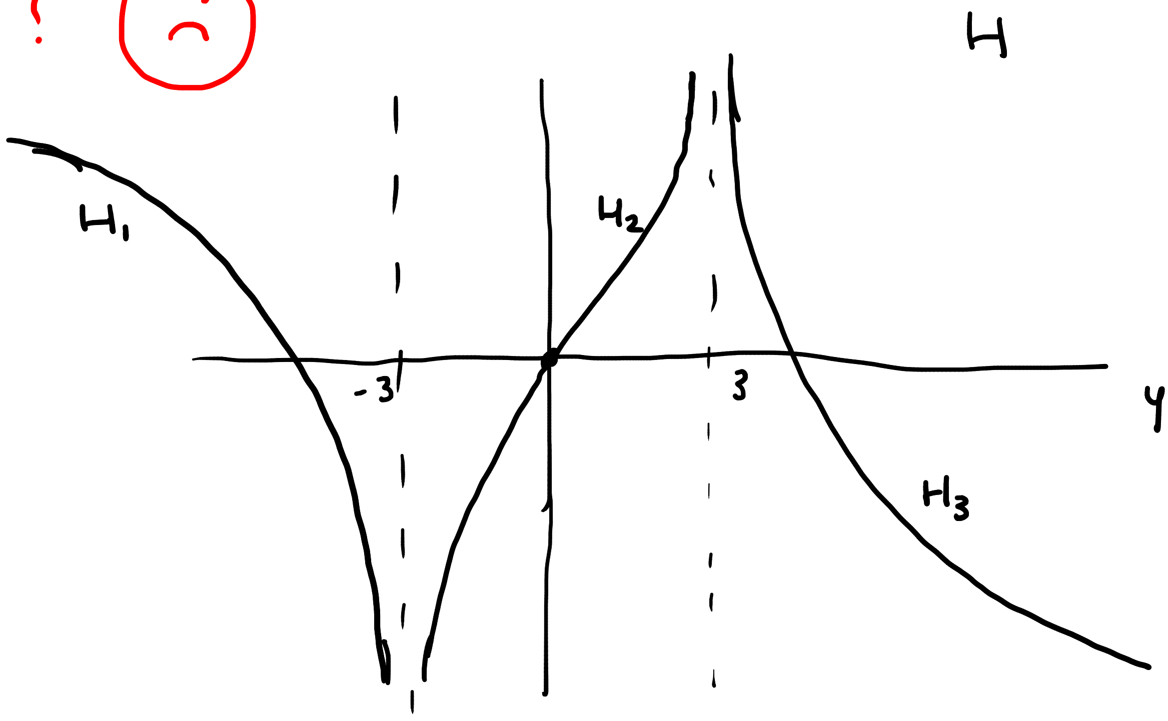
$$H(y) = -y - \frac{5}{3}\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right|$$

$$G'(t) = t \quad ; \quad G(t) = \frac{t^2}{2}$$

$y = y(t)$ sol. dell' eq. diff.:

$$-y(t) - \frac{5}{3}\ln\left|\frac{y(t)-3}{y(t)+3}\right| = \frac{t^2}{2} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

???



	dom	imm
H_1	$]-\infty,-3[$	$\mathbb{R}$
H_1^{-1}	$\mathbb{R}$	$]-\infty,-3[$

$$\varphi_c(t) = H_1^{-1}\left(\frac{t^2}{2}+c\right), \quad I_c = \mathbb{R}$$

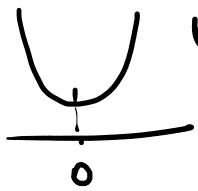
definita in $\mathbb{R}$ — definita in $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

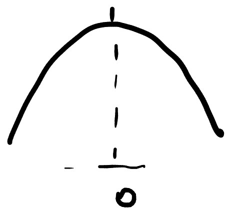
$\varphi_c(t) \in]-\infty,-3[$

(φ_c "vive" in C)

H_1 decresc. (strett.) $\Rightarrow$ H_1^{-1} decresc. (strett.)



$\frac{t^2}{2}+c$



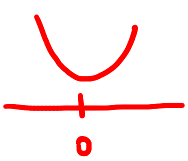
φ_c

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_c(t) = \lim_{t\to\pm\infty} H_1^{-1}\Big(\underbrace{\frac{t^2}{2}}_{\to+\infty}+c\Big) = \lim_{s\to+\infty} H_1^{-1}(s) = -\infty$$

	dom	imm	monot
H_2	$]-3,3[$	$\mathbb{R}$	$\uparrow$
H_2^{-1}	$\mathbb{R}$	$]-3,3[$	$\uparrow$

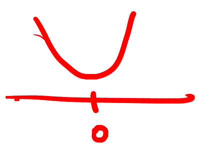
$$\varphi_c(t) = H_2^{-1}\left(\frac{t^2}{2}+c\right) \qquad I_c = \mathbb{R}$$

$\varphi_c(t) \in]-3,3[\;\; \forall t \Rightarrow \varphi_c$ "vive" in B



$\frac{t^2}{2}+c$

φ_c

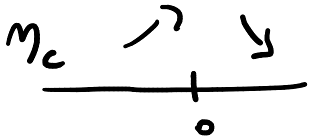


$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_c(t) = \lim_{s\to+\infty} H_2^{-1}(s) = 3$$

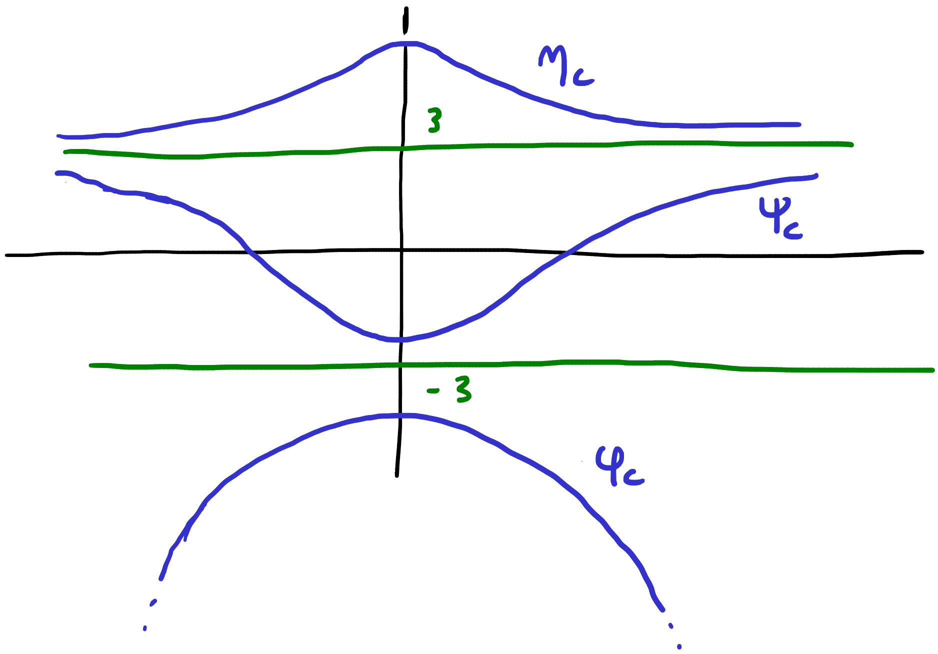
dal grafico

.... $\underbrace{\eta_c}_{\in\,]3,+\infty[}(t) = H_3^{-1}\left(\frac{t^2}{2}+c\right)$ $\qquad I_c = \mathbb{R}$

"vive" in A



$$\lim_{t\to\pm\infty} \eta_c(t) = \lim_{s\to+\infty} H_3^{-1}(s) = 3$$



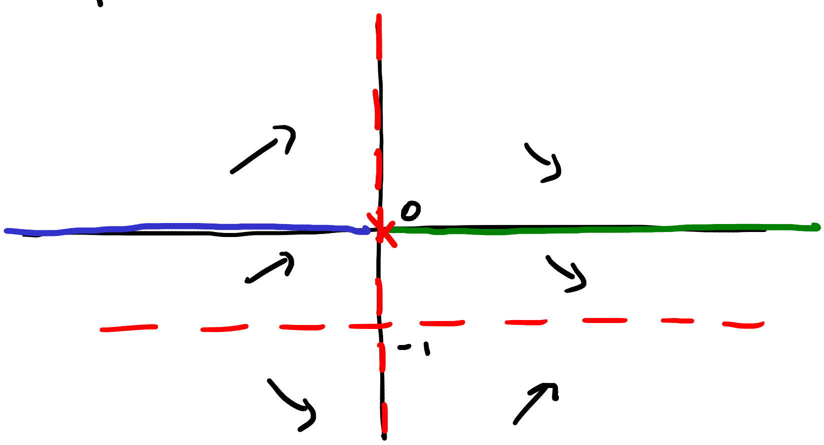
$$y' = -\frac{y^2}{t(y+1)} =: f(t,y)$$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\setminus\{-1\} =: \Omega$

(aperto)

$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ TEUL applicabile ovunque



$f(t,y) = 0 \iff y = 0$

$\Rightarrow \quad y_1(t) \equiv 0$ sol. costante $\quad t \in]-\infty, 0[$

$\qquad y_2(t) \equiv 0 \quad$ " $\qquad t \in]0, +\infty[$

Monotonia: $f(t,y) > 0 \iff -\dfrac{y^2}{t(y+1)} > 0$

$$\iff \frac{y^2}{t(y+1)} < 0$$

Asintoti? $\varphi'(t) = -\dfrac{\varphi(t)^2}{t(\varphi(t)+1)}$

Se $\varphi(t) \to \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\underbrace{\varphi'(t)}_{\to\,0} = -\underbrace{\frac{1}{t}}_{\to\,0} \cdot \frac{\varphi(t)^2}{\varphi(t)+1} \to \frac{\alpha^2}{\alpha+1} \in \mathbb{R}$$

nessuna contraddizione

Se $\alpha = -1$: $\varphi'(t) \to$???

nessuna previsione

DA COMPLETARE ...