23 novembre 2023

Riprendo la dim. del TEUL.

$X := \{ \varphi \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \mid d_\infty(\varphi, x_0) \leq b \}$

$T : X \to X$ t.c. $\forall \varphi \in X : T(\varphi) = \Phi$

con $\Phi : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ t.c.

$\forall t \in I_\delta : \quad \Phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$

Già dimostrato

Prop. 3 : $\exists k \in \mathbb{N}^*$ t.c. T^k è contrazione.

Prop. 4

$\exists! \ \bar{\varphi} \in X$ t.c. $T(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi}$

cioè: T ha un unico punto fisso in X

$\underset{\text{Prop. 1 + Prop. 2}}{\iff}$ il PdC (1) ha un'unica soluzione definita in I_δ.

dim. della Prop. 4.

Sia $k \in \mathbb{N}^*$ t.c. T^k è contrazione (esiste per Prop. 3)

Per il teor. delle contrazioni, T^k ha un unico punto fisso in X (posso appl. il teor. delle contr. perché (X, d_∞) sp. metrico completo e T^k è contrazione)

Lo denoto con $\bar{\varphi}$.

Quindi: $\bar{\varphi} \in X$, $\underbrace{T^k(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi}}_{(*)}$ e non ci sono altri elementi di X soddisfacenti (*)

Valuto

$$T(\bar\varphi) \overset{(*)}{=} T(T^k(\bar\varphi)) = (T \circ T^k)(\bar\varphi) =$$

$$T \circ T^k = T \circ (\underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k}) \overset{\swarrow}{=}$$ "o" è associativo

$$(\underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k}) \circ T = T^k \circ T$$

$$= (T^k \circ T)(\bar\varphi) = T^k(T(\bar\varphi))$$

$$T(\bar\varphi) \in X, \quad T^k(T(\bar\varphi)) = T(\bar\varphi) \overset{\text{unicità}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad \bigcirc = \bar\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad T(\bar\varphi) = \bar\varphi$$

cioè: $\bar\varphi$ è punto fisso di T

Devo dimostrare che T non ha altri punti fissi, cioè punti fissi diversi da $\bar\varphi$

Suppongo che $\tilde\varphi \in X$ sia punto fisso di T, cioè

$$T(\tilde\varphi) = \tilde\varphi .$$

Valuto

$$T^2(\tilde\varphi) = T(\underbrace{T(\tilde\varphi)}_{=\tilde\varphi}) = T(\tilde\varphi) = \tilde\varphi$$

$\Rightarrow$ $\tilde\varphi$ è punto fisso di T^2

Valuto

$$T^3(\tilde{\varphi}) = T(\underbrace{T^2(\tilde{\varphi})}_{=\tilde{\varphi}}) = T(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\varphi}$ è punto fisso di T^3

Iterando: $\tilde{\varphi}$ è punto fisso di T^k, ma T^k ha un unico punto fisso ($\bar{\varphi}$), quindi:

$$\tilde{\varphi} = \bar{\varphi}.$$

$\square$ prop 4

$\square$ TEUL.

Ricordo la dim. del teor. delle contrazioni:

(Y, d) sp. m. completo, $F: Y \to Y$ contraz.

$y_0 \in Y$ arbitrario

$y_1 = F(y_0)$, $y_2 = F(y_1)$ $(= F^2(y_0))$

$y_3 = F(y_2)$ $(= F^3(y_0))$

$\vdots$

$y_k = F(y_{n-1})$

$\vdots$

$\{y_k\} \subset Y$ di Cauchy in (Y, d)

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{k \to +\infty} y_k =: y$

y è l'unico punto fisso di F.

Nella dim. del TEUL:

l'unica sol. di (P) in I_δ è l'unico punto fisso di T, cioè il limite nello sp. metrico (X, d_∞) della successione definita per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} \varphi_0 = \text{un elemento scelto a piacere in } X \\ \varphi_k = T(\varphi_{k-1}) \quad \odot \end{cases}$$

Oss: "limite in (X, d_∞)" equivale a dire "convergenza uniforme in I_δ"

Scelgo $\varphi_0 = x_0$ (funzione costante)

Esplicito $\odot$:

$$\forall t \in I_\delta : \quad \varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{k-1}(s))\, ds \quad (k \geq 1)$$

Risolvo per approssimazioni successive

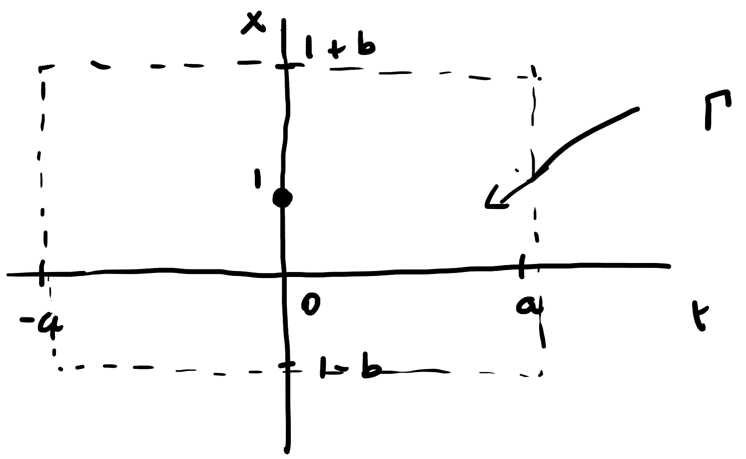
(P) $y' = y$, $y(0) = 1$

$n = 1$, $f(t,x) = x$ $\qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(t_0, x_0) = (0,1)$

- continua in $\mathbb{R}^2$
- f è lipschitziana in x uniformemente in t in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ posso scegliere $a, b > 0$ arbitrariamente



$$\Gamma = [-a, a] \times [1-b, 1+b]$$

$$\max_{(t,x)\in\Gamma} |f(t,x)| = \max_{(t,x)\in\Gamma} |x| = 1+b =: M$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{M} = \frac{b}{1+b} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \delta := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} < 1$$

Considero $\forall t \in [-\delta, \delta]$:

$$\varphi_0(t) = 1$$

$k \geq 1$: $$\varphi_k(t) = 1 + \int_0^t f(s, \varphi_{k-1}(s))\, ds$$

$$= 1 + \int_0^t \varphi_{k-1}(s)\, ds$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \varphi_0(s)\, ds = 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t \varphi_1(s)\, ds = 1 + \int_0^t (1+s)\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t \varphi_2(s)\, ds = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds$$

$$= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}$$

$\vdots$

$$\varphi_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}$$

pol. di Taylor di ordine k di $t \to e^t$

$\Rightarrow \varphi_k(t) \to e^t$ unif. in $[-\delta, \delta]$
(in realtà: in ogni compatto di $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ l'unica sol. di (P) in $[-\delta, \delta]$ è

$$\varphi(t) = e^t. \qquad \square$$

Risolvo per appross. successive il PdC

(2) $\quad y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Trasformo (2) in un PdC vettoriale di ordine 1

$$y'' + y = 0 \iff y'' = -y$$

Con $u := y$, $v := y'$

$$(2) \iff \begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases} + \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ v(0) = 1 \end{array} \qquad (3)$$

$n = 2 \qquad f(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua

f è lipschitziana rispetto a $x = (x_1, x_2)$ uniformemente in t, in tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$\forall \; (t, x_1, x_2), \; (t, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$:

$$|f_1(t, \underbrace{x_1, x_2}_{x}) - f_1(t, \underbrace{y_1, y_2}_{y})| = |x_2 - y_2| \leq \|x - y\|_{\mathbb{R}^2}$$

$\Rightarrow f_1$ è lipsch. con $L_1 = 1$

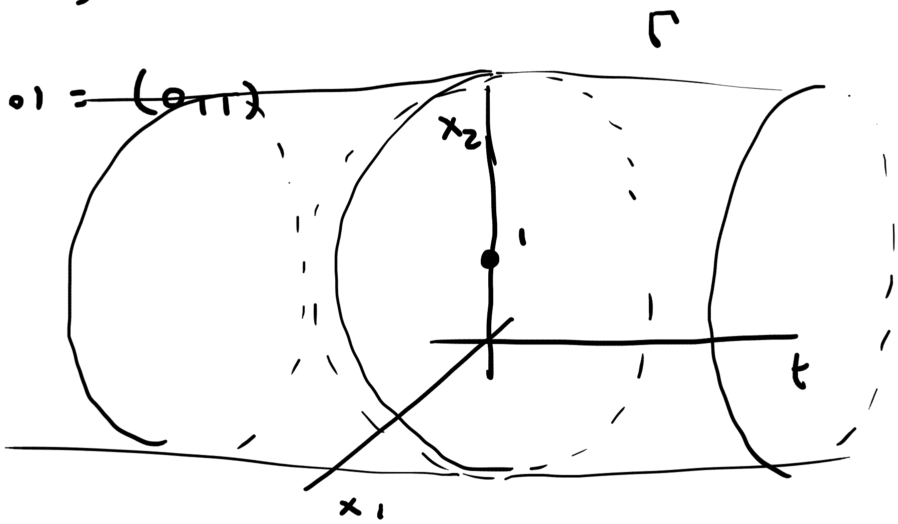
$$|f_2(t, x) - f_2(t, y)| = |-x_1 - (-y_1)|$$
$$= |y_1 - x_1| \leq \|x - y\|_{\mathbb{R}^2}$$

$\Rightarrow f_2$ è lipsch. con $L_2 = 1$

$\Rightarrow f$ è lipsch.

$t_0 = 0 \qquad (u_0, v_0) = \cancel{(0,1)}$

$(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$



Posso scegliere $a, b > 0$ arbitrari
e costruire

in $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma := [-a, a] \times \bar{B}_b(0,1)$$

$\|(x_1, x_2)\|_{\mathbb{R}^2}$
=

$$M := \max_{(t,x) \in \Gamma} \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^2} = \max_{(x_1,x_2) \in \bar{B}_b(0,1)} \sqrt{x_2^2 + x_1^2}$$

$\uparrow$

$$\|(x_1, x_2) - (0,1)\|_{\mathbb{R}^2} \leq b$$

$$M \leq b + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{M} \geq \frac{b}{b+1}$$

Definisco per ricorrenza $\left\{ \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix} \right\}$:

$\forall t \in [-\delta, \delta]$:

$$\varphi_0(t) = 0$$
$$\psi_0(t) = 1$$

$$\forall k \geq 1: \quad \begin{pmatrix} \varphi_k(t) \\ \psi_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t f(s, \varphi_{k-1}(s), \psi_{k-1}(s))\, ds$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \psi_{k-1}(s) \\ -\varphi_{k-1}(s) \end{pmatrix} ds$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_k(t) = 0 + \int_0^t \psi_{k-1}(s)\, ds = \int_0^t \psi_{k-1}(s)\, ds \\ \psi_k(t) = 1 - \int_0^t \varphi_{k-1}(s)\, ds \end{cases}$$

Calcolo:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \int_0^t \psi_0(s)\, ds = \int_0^t 1\, ds = t \\ \psi_1(t) = 1 - \int_0^t \underbrace{\varphi_0(s)}_{=0}\, ds = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2(t) = \int_0^t \psi_1(s)\, ds = \int_0^t 1\, dt = t \\ \psi_2(t) = 1 - \int_0^t \varphi_1(s)\, ds = 1 - \int_0^t s\, ds = 1 - \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_3(t) = \int_0^t \psi_2(s)\, ds = \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds = t - \frac{t^3}{6} \\ \psi_3(t) = 1 - \int_0^t \varphi_2(s)\, ds = 1 - \int_0^t s\, ds = 1 - \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_4(t) = \int_0^t \psi_3(s)\,ds = \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds = t - \frac{t^3}{3!} \\ \psi_4(t) = 1 - \int_0^t \varphi_3(s)\,ds = 1 - \int_0^t \left(s - \frac{s^3}{6}\right) ds \end{cases}$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}$$

$\vdots$

Riconosciamo che

$$\varphi_k(t) \to \sin(t)$$
$$\psi_k(t) \to \cos(t)$$

$\Rightarrow$ $t \in]_\delta \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ è l'unica sol. del PdC vettoriale (3)

$\Rightarrow$ $t \in I_\delta \mapsto \sin(t)$ è l'unica sol. del PdC (2)

$x \in [0, +\infty[\mapsto x^\alpha \qquad \alpha \in]0, 1[$

Se fosse lipsch.: $\exists L > 0$ t.c. $\forall x \in [0, +\infty[$:

$$|x^\alpha| \leq L\,|x|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{L} \leq |x|^{\overbrace{1-\alpha}^{>0}} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Per $x \to 0^+$: $\frac{1}{L} \leq 0$ $\underline{\underline{!!!}}$

Eq. a variabili separabili

Supp. $f(t,x) = g(t)\, h(x)$

con g definita in I intervallo

h definita in $A \subseteq \mathbb{R}$

Supponso $\bar{y} \in A$ t.c. $h(\bar{y}) = 0$

Definisco $\varphi: I \to \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(t) = \bar{y}$ $\forall t \in I$

Oss: I intervallo, φ è deriv. in I

$\forall t \in I$: $(t, \varphi(t)) = (\underbrace{t}_{\in I}, \underbrace{\bar{y}}_{\in A}) \in I \times A$ $(= \mathrm{dom}(f))$

$\forall t \in I$: $\varphi'(t) = 0$

$$f(t, \varphi(t)) = g(t)\, h(\varphi(t)) = g(t)\, \underbrace{h(\bar{y})}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ φ è soluzione dell'eq. diff. (definita in I)

(1) $y' = g(t)\, h(y)$

$\varphi: I_\varphi \to \mathbb{R}$ sol. : $\forall t \in I_\varphi$: $\varphi'(t) = g(t)\, h(\varphi(t))$

???? $\rightarrow$ $\dfrac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t)$

Supp. che il TEUL sia applicabile

Oss: supponso che h si annulli in $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots$

Prendo $\varphi : I_\varphi \subseteq I \to \mathbb{R}$ soluz. di (1)

<u>non</u> costante

Allora:

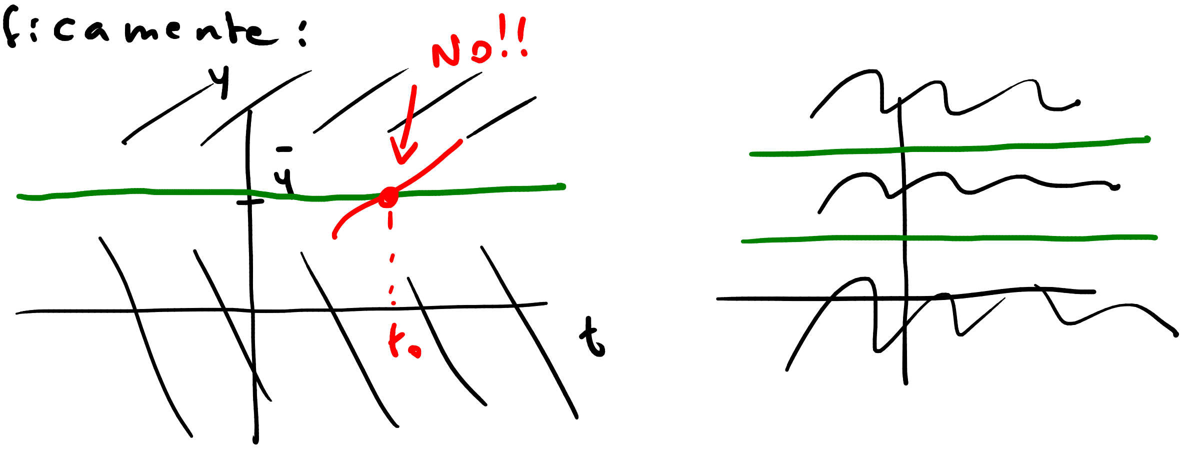
$$\forall t \in I_\varphi : \quad \varphi(t) \notin \{ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \}$$

Perché? Se esistesse $t_0 \in I_\varphi$ t.c.

$\varphi(t_0) = \bar{y}_k$ per un dato k

il PdC $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = \bar{y}_k \end{cases}$ avrebbe <u>DUE</u> soluzioni distinte, assurdo!

Graficamente:



Per un'equazione a variab. separ. "buona"

se φ è sol. non costante:

$$h(\varphi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I_\varphi$$

$\Rightarrow$ posso dividere ottenendo

$$\forall t \in I_\varphi : \quad \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \qquad (*)$$

c'è?? La so trovare?? Definisco $A^* = \{x \in A \mid h(x) \neq 0\}$

Sia H una primitiva di $\frac{1}{h}$ in A^*

$\Rightarrow \forall x \in A^* \quad \exists\, H'(x) = \frac{1}{h(x)}$

$\Rightarrow \forall t \in I_\varphi : \quad (H \circ \varphi)'(t) = H'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))}$

$\varphi(t) \in A^*$

$\Rightarrow H \circ \varphi$ è primitiva di $t \mapsto \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))}$

la trovo?

Suppongo G primitiva di g in I

$(\Leftrightarrow \forall t \in I : \quad G'(t) = g(t)\ )$

$\circledast \quad (\Rightarrow \quad \forall \varphi \in \underset{\smile}{I_\varphi} : \quad (H \circ \varphi)'(t) = G'(t)$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ tc $\quad (H \circ \varphi)(t) = G(t) + c \quad \forall t \in I_\varphi$

$H(\varphi(t)) = G(t) + c \quad \forall t \in I_\delta$

Se H è invertibile:

so determinare H^{-1}?

$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \qquad \forall t \in I_\delta$??

Eq. logistica:

$g(t) \equiv 1 \qquad t \in \mathbb{R}$

(1) $y' = y(1-y)$

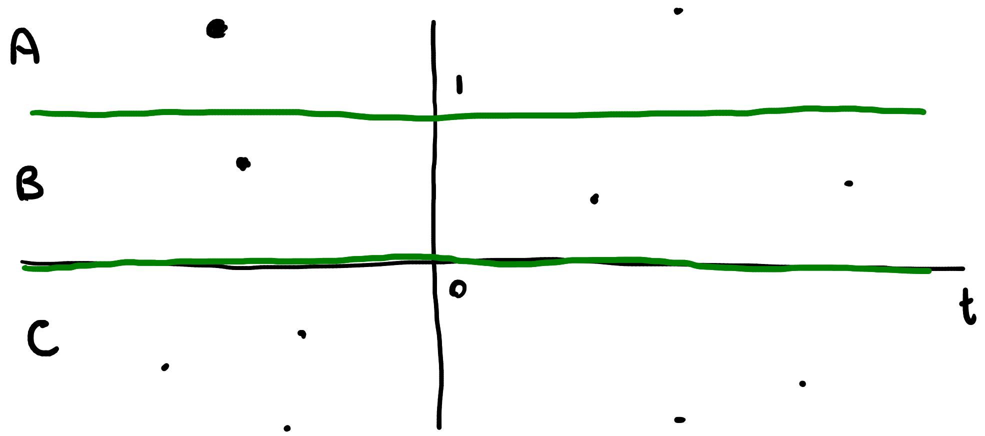
$h(y) = y(1-y) \qquad y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\Omega = \mathbb{R}^2$ aperto, g continua, $h \in C^1$ $\Big|$ $\Rightarrow$ TEUL applicabile a qualsiasi PdC associato

$h(y) = 0 \iff y(1-y) = 0 \iff y = 0, \; y = 1$

- due soluzioni costanti ($\varphi \equiv 0$, $\varphi \equiv 1$)

- qualsiasi sol. non costante non assume mai il valore 0 né il valore 1



Cerco le soluz. non costanti.

Cerco una primitiva di $\frac{1}{h}$:

$$\frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

$$\Rightarrow H(y) = \ln|y| - \ln|1-y| = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right|$$

Cerco una primitiva di g:

$$g(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(t) = t$$

Allora: $y = y(t)$ è sol. di: (1)

$\forall t \in ???$ $\quad H(y(t)) = G(t) + c'$ per $c' \in \mathbb{R}$

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = t + c' \qquad c' \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = e^{t+c'} = e^t \cdot \underbrace{e^{c'}}_{c}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = c\, e^t \quad , \quad c > 0 \qquad (*)$$

Cerco le soluzioni "che vivono in B", cioè t.c. $0 < y(t) < 1$ $\forall t \in ???$

Per queste $(*)$ equivale a

$$\frac{y(t)}{1-y(t)} = c\, e^t$$

$$\Leftrightarrow y(t) = ce^t - ce^t y(t)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1 + \underbrace{c e^t}_{>0})}_{>0}\, y(t) = c\, e^t$$

$$\Leftrightarrow y_c(t) = \frac{ce^t}{1+ce^t} \quad , \quad c > 0$$

$$I_c = \mathbb{R}$$

Oss: $\lim_{t \to -\infty} y_c(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} y_c(t) = 1$

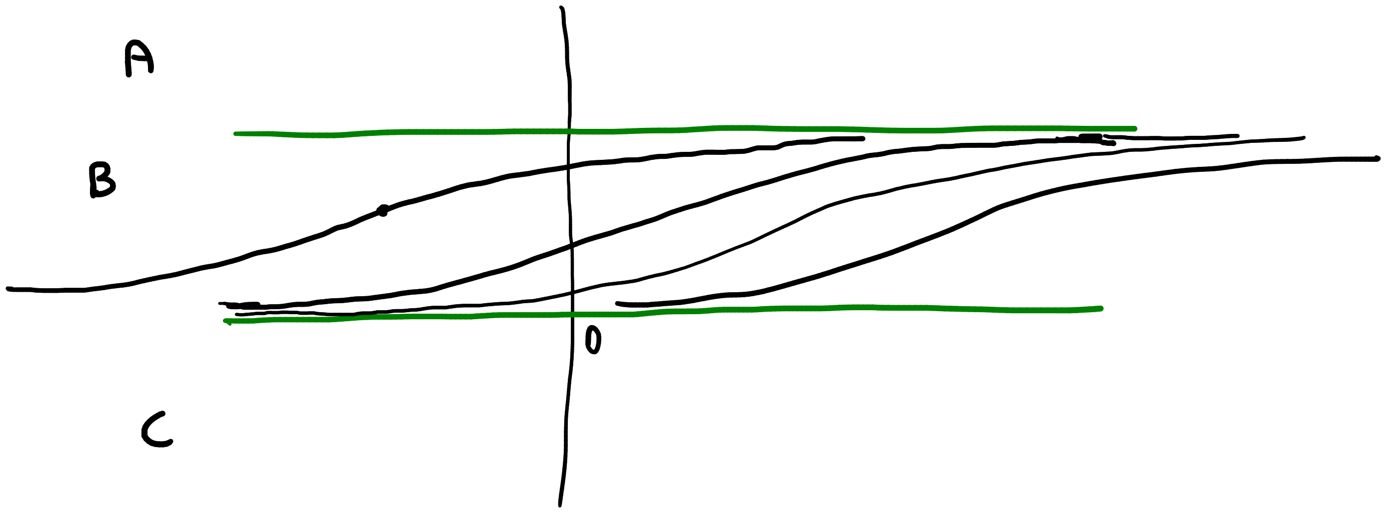
Oss: y_c risolve

$$y' = y(1-y)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$: $y_c(t) \in]0,1[$

$$\Rightarrow \quad y_c(t)\,(1-y_c(t)) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y_c'(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad y_c \text{ è strett. cresc. in } \mathbb{R}$$



Cerco le sol. che "vivono in A" oppure "vivono in C"

(cioè hanno valori >1 oppure <0)

Per queste:

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{y(t)}{1-y(t)} = c e^t \qquad c>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y(t)}{y(t)-1} = c e^t$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = c e^t y(t) - c e^t$$

$$\iff (ce^t - 1)\, y(t) = ce^t$$

$\neq 0 ??$

Imponendo $ce^t - 1 \neq 0$

ottengo

$$y(t) = \frac{ce^t}{ce^t - 1} = \frac{e^t}{e^t - \frac{1}{c}} \qquad c > 0$$

Equivalentemente

$$y_c(t) = \frac{e^t}{e^t - c} \qquad c > 0$$

Condizione per determinare I_c

$$e^t - c \neq 0$$

$$\iff e^t \neq c$$

$$t \neq \ln(c)$$

~~La sol. è~~

$$\cancel{y_c(t) = \frac{e^t}{e^t - c}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(c)\}}$$

Non è un intervallo!

Da completare ...