21 novembre 2023

Dimostro il TEUL

Osservo che

$\cdot M := \max\limits_{(t,x)\in\Gamma} \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n}$

è ben definito per il teor. di Weierstrass.

Suppongo $M = 0$, quindi:

$\Rightarrow \forall (t,x)\in\Gamma : \quad \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} = 0$

$\Rightarrow \forall (t,x)\in\Gamma : \quad f(t,x) = 0$

$\delta := a$ Definisco $\varphi : [t_0-a, t_0+a] \to \mathbb{R}^n$ tc

$\forall t : \quad \varphi(t) = x_0$

Oss: φ è deriv.

$$\left.\begin{array}{l} \forall t : \quad (t,\varphi(t)) = (t,x_0) \in \Gamma \subset \Omega \\ \forall t : \quad \varphi'(t) = 0 \overset{}{=} \\ \qquad \quad \overset{\shortparallel}{f(t,\varphi(t))} = f(t,x_0) = 0 \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right] \Rightarrow \varphi \text{ risolve } (P)$$

φ è unica perché qualsiasi altra sol. ψ

deve soddisfare $\psi'(t) = f(t,\psi(t))$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \psi'(t) = 0 \Rightarrow \psi \text{ è costante} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \psi(t_0) = x_0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\psi(t) \equiv x_0$

Da ora in poi, suppongo $M > 0$.

Prop 1 (equivalenza tra PdC e equazione integrale)

Sia $\varphi : I_\delta \to \mathbb{R}^n$. Sono equivalenti: $\quad \delta := \min\{a, \frac{b}{M}\}$

(a) φ è soluzione di (P)

(b) φ è continua in I_δ e

$$\forall t \in I_\delta : \left.\begin{array}{l} (t, \varphi(t)) \in \Omega \\ \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \end{array}\right] \quad (E)$$

Dim.

$a \Rightarrow b$

φ sol. di (P) $\Rightarrow$ φ è derivabile $\Rightarrow$ φ è continua

φ sol. di (P), f continua $\xRightarrow{\text{regolarità}}$ φ è di classe C^1

$\Rightarrow$ φ' è continua

Per la FFCI:

$$\forall t \in I_\delta : \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\, ds = \varphi(t) - \underbrace{\varphi(t_0)}_{= x_0} \qquad \varphi \text{ risolve (P)}$$

$$\forall t \in I_\delta : \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\, ds$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

φ risolve (P)

$\Downarrow$

$\forall t \in I_\delta :$ $(t, \varphi(t)) \in \Omega$

$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

Quindi: φ è sol. continua di (E).

$b \Rightarrow a$

Suppongo $\varphi : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ continua e t.c.

$\forall t \in I_\delta :$ $\quad (t, \varphi(t)) \in \Omega \quad$ e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

Per $t = t_0$: $\quad \varphi(t_0) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))\, ds}_{=0} = x_0$

Osservo che:

$h := t \in I_\delta \longmapsto f(t, \varphi(t))$

cont. per ipotesi (b)

cont. per ipotesi

è continua

Per il TFCI:

$$t \in I_\delta \mapsto \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

è una primitiva di h

$\Rightarrow \quad t \in I_\delta \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$

è una primitiva di h

$\Leftrightarrow \quad \varphi$ è una primitiva di h

$\Rightarrow \quad \varphi$ è derivabile in I_δ e

$\forall t \in I_\delta : \quad \varphi'(t) = h(t) = f(t, \varphi(t))$

Quindi: φ risolve (P). $\square$

Osservazione (immagine di sol. cont. di (E))

Se $\varphi : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ è sol. continua di (E)

allora:

$$\varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0) \qquad (*)$$

Dimostrazione:

(a) $\iff \quad \forall t \in I_\delta : \quad \varphi(t) \in \bar{B}_b(x_0)$

$\iff \quad \forall t \in I_\delta : \quad \| \varphi(t) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} \leq b$

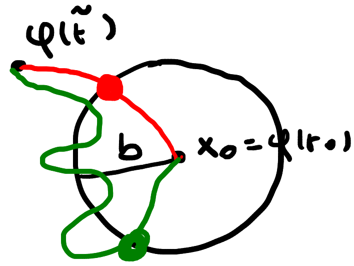
Per assurdo, suppongo che esista $\tilde{t} \in I_\delta$ t.c.

$$\| \varphi(\tilde{t}) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} > b$$

Osservo che:

$$h := t \in I_\delta \mapsto \| \overset{\text{continua}}{\varphi(t)} - x_0 \|_{\mathbb{R}^n}$$

è una funzione continua;



$$h(t_0) = \| \underbrace{\varphi(t_0)}_{= x_0} - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} = 0 < b$$

$$h(\tilde{t}) = \| \varphi(\tilde{t}) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} > b$$

Per il teor. dei valori intermedi, esiste $\hat{t}$ strettamente compreso tra t_0 e $\tilde{t}$ t.c.

$$\| \varphi(\hat{t}) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} = b$$

$\forall t$ compreso tra t_0 e $\hat{t}$:

$$\| \varphi(t) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} \leq b$$

Prima di proseguire, faccio un richiamo dall'analisi II:

$v : I \to \mathbb{R}^n$ continua, $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leq \beta$:

$$\left\| \int_\alpha^\beta v(t)\, dt \right\| \le \int_\alpha^\beta \|v(t)\|\, dt$$

Da questo segue che:

$$\forall\, \alpha, \beta \in I \;:\; \left\| \int_\alpha^\beta v(t)\, dt \right\| \le \left| \int_\alpha^\beta \|v(t)\|\, dt \right|$$

Inoltre: date $u, v : I \to \mathbb{R}$ continue t.c.

$$\forall t \in I: \quad \underline{\underline{0}} \le u(t) \le v(t)$$

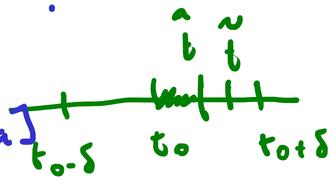
$$\forall\, \alpha, \beta \in I: \quad \left| \int_\alpha^\beta u(t)\, dt \right| \le \left| \int_\alpha^\beta v(t)\, dt \right| \quad \triangle$$

Riprendo la dimostrazione:

$$\underline{b} = \|\varphi(\hat t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^{\hat t} f(s, \varphi(s))\, ds - \cancel{x_0} \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{\hat t} f(s, \varphi(s))\, ds \right\|_{\mathbb{R}^n} \le \left| \int_{t_0}^{\hat t} \underbrace{\| f(s, \varphi(s)) \|}_{?}\, ds \right| = \odot$$

s compreso tra t_0 e $\hat t$ $\Rightarrow$ $s \in I_\delta \subset [t_0 - a, t_0 + a]$



$\Downarrow$

$\|\varphi(s) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \le b$

$\Updownarrow$

$\varphi(s) \in \bar B_b(x_0)$ $\Rightarrow$ $(s, \varphi(s)) \in \Gamma$

$\Rightarrow$ $\boxed{\|f(s, \varphi(s))\|_{\mathbb{R}^n} \le M}$

$$\odot \overset{\triangle}{\le} \left| \int_{t_0}^{\hat t} M\, ds \right| = M\, |\hat t - t_0|$$

$$< M\, |\tilde t - t_0| \le M \delta \le M \cdot \frac{b}{M} = \underline{b}$$

$\hat t$ STRETT. compreso tra t_0 e $\tilde t$

Ho trovato $b < b$, assurdo! $\square$

Corollario (di Prop 1 + Oss.)

Data $\varphi : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ sono equivalenti:

(a) φ è soluzione di (P)

(b) φ è soluzione continua di (E) con immagine contenuta in $\bar{B}_b(x_0)$.

Definisco

$$X := \{ \varphi : I_\delta \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ è continua e } \varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0) \}$$

Lemma

Sia $\varphi \in X$. Definisco $\Phi : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\Phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \quad \forall t \in I_\delta.$$

Allora: $\Phi \in X$.

Dim. $\underline{\Phi} : \underline{\underline{I_\delta}} \to \underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$ è vero per definizione.

$\underline{\Phi \text{ è continua}}$ (in realtà è di classe C^1) perché primitiva di $t \mapsto f(t, \varphi(t))$

che è continua in quanto:

- f è cont. per ipotesi;
- φ è continua perché $\varphi \in X$.

Verifico che $\Phi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0)$:

$\forall t \in I_\delta$: $\|\Phi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} = \|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds - \cancel{x_0}\|_{\mathbb{R}^n}$

$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \| f(s, \varphi(s)) \| \, ds \right|$

compreso tra t_0 e t $\Rightarrow$ compreso tra $t_0 - a$, $t_0 + a$

$\in \bar{B}_b(x_0)$ perché $\varphi \in X$

$\Rightarrow (s, \varphi(s)) \in \Gamma \Rightarrow \| f(s, \varphi(s)) \|_{\mathbb{R}^n} \leq M$

$\leq \left| \int_{t_0}^{t} M \, ds \right| = M\,|t - t_0| \leq M\delta \leq M \cdot \frac{b}{M} = b$

$\square$

Prop. 2 (equivalenza tra (E) (e quindi (P)) e problema di punto fisso)

Definisco $T : X \to X$ ponendo

$T(\varphi) = \Phi^{\in X \text{ per il lemma}} \quad \forall \varphi \in X$ (notazioni come nel lemma)

Data $\varphi : I_\delta \to \mathbb{R}^n$, sono equivalenti:

(a) φ è sol. continua di (E) con $\varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0)$

(b) φ è punto fisso di T, cioè:

$\varphi \in X$ e $T(\varphi) = \varphi$.

Dim:

φ continua con $\varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0) \iff \varphi \in X$

φ sol. di (E) $\iff$

$$\forall t \in I_\delta: \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \iff$$

$$\forall t \in I_\delta: \quad \varphi(t) = \Phi(t) \qquad \iff$$

$$\forall t \in I_\delta: \quad \varphi(t) = (T(\varphi))(t) \qquad \iff$$

$$\varphi = T(\varphi) \qquad \square$$

$(T(\varphi))(t)$ NON $T(\varphi(t))$!!!

Per quanto detto fino a ora, la tesi del TEUL è diventata:

T ha un unico punto fisso in X.

Vorrei utilizzare il teor. delle contrazioni, che si applica a contrazioni definite in spazi metrici completi.

Comincio a esaminare X.

Abbiamo definito

$$X := \{ \varphi : I_\delta \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ continua}, \ \varphi(I_\delta) \subset \bar{B}_b(x_0) \}$$

$$= \{ \varphi \in \underset{\uparrow\, C_b(I_\delta, \mathbb{R}^n)}{C(I_\delta, \mathbb{R}^n)} \mid \underbrace{\forall t \in I_\delta: \ \|\varphi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \le b}_{} \}$$

$$\iff \sup_{t \in I_\delta} \|\varphi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \le b$$

Ricordo che, munito di

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{t \in I_\delta} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

è spazio di Banach,

funzione costante di valore x_0

$$\iff \|\varphi - x_0\|_\infty \le b$$

cioè spazio metrico completo rispetto a $\Bigg\} \Leftrightarrow d_\infty(\varphi, x_0) \leq b$

$d_\infty(\varphi, \psi) := \|\varphi - \psi\|_\infty$

$\Rightarrow X = \{\varphi \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \mid d_\infty(\varphi, x_0) \leq b\}$

Quindi: X è la palla chiusa di centro la funzione costante di valore x_0 e raggio b nello spazio metrico $(\underbrace{C(I_\delta, \mathbb{R}^n), d_\infty}_{\text{completo}})$

$\Rightarrow (X, d_\infty)$ è spazio metrico completo.

Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ poniamo $T^k := \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k \text{ volte}}$

ben posta perché $T : X \to X$

Prop. 3

Esiste $k \in \mathbb{N}^*$ t.c. T^k è una contrazione.

Dim.

Ricordiamo cos'è una contrazione:

sp. metrico con dist. d $\quad g : X \to X$ t.c. $\exists \alpha \in]0,1[$ t.c.

$\forall x, y \in X : \quad d(g(x), g(y)) \leq \alpha \, d(x,y)$

Fisso $\varphi, \psi \in X$ e valuto $d_\infty(T(\varphi), T(\psi))$

$= \|T(\varphi) - T(\psi)\|_\infty$

Fisso $t \in I_\delta$:

$$\| T(\varphi)(t) - T(\psi)(t) \|_{\mathbb{R}^n} =$$

$$\left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\, ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))\, ds \right) \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s)) \right) ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \| f\overbrace{(\underbrace{s}_{\in [t_0-a,\,t_0+a]}, \underbrace{\varphi(s)}_{\in \bar{B}_b(x_0)})}^{\in \Gamma} - f\overbrace{(s, \psi(s))}^{\in \Gamma} \|_{\mathbb{R}^n}\, ds \right|$$

Denoto con L la costante di Lipschitz di f in Γ

$$\| f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s)) \|_{\mathbb{R}^n} \leq L \| \varphi(s) - \psi(s) \|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq L \| \varphi - \psi \|_\infty$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \| \varphi - \psi \|_\infty\, ds \right| = L \| \varphi - \psi \|_\infty \, |t - t_0|$$

Quindi:

(*) $$\forall t \in I_\delta : \; \| T(\varphi)(t) - T(\psi)(t) \|_{\mathbb{R}^n} \leq L \| \varphi - \psi \|_\infty \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \delta}$$

Da questo deduco:

$$\forall t \in I_\delta : \; \| T(\varphi)(t) - T(\psi)(t) \|_{\mathbb{R}^n} \leq L\delta \, \| \varphi - \psi \|_\infty$$

$$\Rightarrow \; \| T(\varphi) - T(\psi) \|_\infty \leq L\delta \, \| \varphi - \psi \|_\infty$$

Se fosse $L\delta < 1$, T sarebbe una contrazione; però: non so se $L\delta < 1$!!

Considero $T^2 = T \circ T$. Fisso $\varphi, \psi \in X$

e valuto $d_\infty (T^2(\varphi), T^2(\psi))$

$$\| T^2(\varphi) - T^2(\psi) \|_\infty = \sup_{t \in I_\delta} \| \dots \|_{\mathbb{R}^n}$$

Fisso $t \in I_\delta$:

$$\| T^2(\varphi)(t) - T^2(\psi)(t) \|_{\mathbb{R}^n} = \| T(\widehat{T(\varphi)})(t) - T(T(\psi))(t) \|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, T(\varphi)(s))\, ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, T(\psi)(s))\, ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \big(f(s, T(\varphi)(s)) - f(s, T(\psi)(s)) \big)\, ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\| f(s, \overbrace{T(\varphi)(s)}^{\in \Gamma}) - f(s, \overbrace{T(\psi)(s)}^{\in \Gamma}) \|_{\mathbb{R}^n}}_{\substack{\leq L \| T(\varphi)(s) - T(\psi)(s) \|_{\mathbb{R}^n} \\ \overset{*}{\leq} L\, L \|\varphi - \psi\|_\infty |s - t_0|}}\, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L^2 \|\varphi - \psi\|_\infty |s - t_0|\, ds \right|$$

$$= L^2 \|\varphi - \psi\|_\infty \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|\, ds \right|$$

$$= L^2 \|\varphi - \psi\|_\infty \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

Quindi: $\forall t \in I_\delta$:

$$\| T^2(\varphi)(t) - T^2(\psi)(t) \|_{\mathbb{R}^n} \leq L^2 \|\varphi - \psi\|_\infty \frac{\overbrace{|t - t_0|}^{\leq \delta}{}^2}{2}$$

Passando al sup:

$$\forall \varphi, \psi \in X : \quad \| T^2(\varphi) - T^2(\psi) \|_\infty \leq \frac{L^2 \delta^2}{2} \| \varphi - \psi \|_\infty$$

Se sapessi che $\frac{L^2\delta^2}{2} < 1$, avrei che T^2 è una contrazione. Ma non so se è vero...

Iterando (o per induzione) ottengo che

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \| T^j(\varphi) - T^j(\psi) \|_\infty \leq \frac{(L\delta)^j}{j!} \| \varphi - \psi \|_\infty$$

Osservo che:

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\overbrace{(L\delta)^j}^{\text{progr. geom.}}}{\underbrace{j!}_{\text{fattoriale}}} = 0$$

$\Rightarrow$ definitivamente $\frac{(L\delta)^j}{j!} < 1$

Scelgo k t.c. $\frac{(L\delta)^j}{j!} < 1$

$\Rightarrow$ T^k è una contrazione. $\square$