16 novembre 2023

$$y'' - \sin(t y') + t^3 y = 0$$

Forma normale: $y'' = \sin(t y') - t^3 y$

$$f(t, x_1, x_2) = \sin(t x_2) - t^3 x_1$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^3 \quad (= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$$

$$y''' + \ln(t) y' - t \arcsin(y'') = 0$$

$$y''' = - \ln(t) y' + t \arcsin(y'')$$

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = - \ln(t) x_2 + t \arcsin(x_3)$$

$$\mathrm{dom}(f) =]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-1, 1]$$

$$t^2 y'' + t y' + y^3 + e^t = 0 \qquad F(t, x_1, x_2, x_3) = t^2 x_3 + t x_2 + x_1^3 + e^t$$

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

$$t^2 y'' = - t y' - y^3 - e^t$$

$$y'' = \frac{-t y' - y^3 - e^t}{t^2} \qquad t \neq 0$$

$$f(t, x_1, x_2) = \frac{-t x_2 - x_1^3 - e^t}{t^2}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

$$(y')^2 - \sin(t) + e^y = 0 \qquad F(t, x_1, x_2) = x_2^2 - \sin(t) + e^{x_1}$$

$$\mathrm{dom}(F) = \mathbb{R}^3$$

$$(y')^2 = \underbrace{\sin(t) - e^y}_{\geq 0}$$

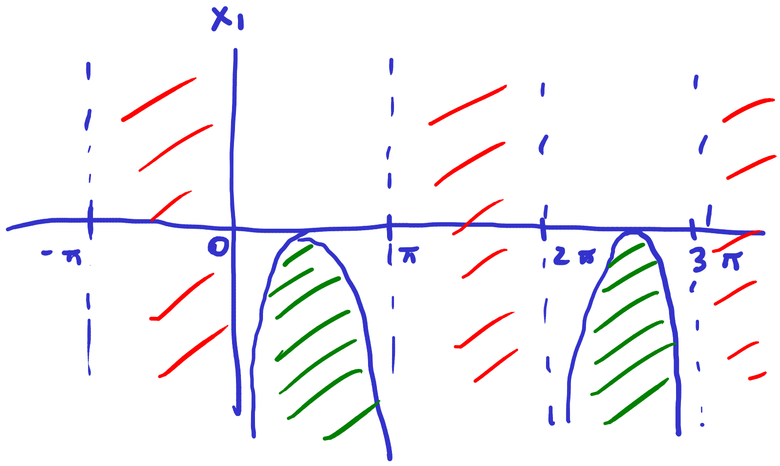
Due equazioni in forma normale:

$$y' = \sqrt{\sin(t) - e^y}$$

$$y' = -\sqrt{\sin(t) - e^y}$$

$$f_\pm(t, x_1) = \pm\sqrt{\sin(t) - e^{x_1}}$$

$$\mathrm{dom}(f_\pm) = \,?$$



$\sin(t) \geq e^{x_1}$

$x_1 \leq \ln(\sin(t))$
$\uparrow$
>0

Una soluzione del PdC

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y(t_0) = x_1^0, \quad y'(t_0) = x_2^0, \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$$

con $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$

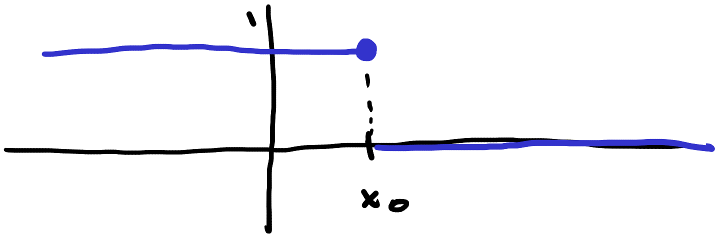
è una coppia (φ, I) t.c.

- $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo contenente t_0
- $\varphi: I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte
- $\forall t \in I: \ (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in I: \ \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$
- $\varphi(t_0) = x_1^0, \quad \varphi'(t_0) = x_2^0, \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$

Es: $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $h(x) = \begin{cases} 1 & x \le x_0 \\ 0 & x > x_0 \end{cases}$

$$(1) \begin{cases} y' = h(y) =: f(t, y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Dico che: questo PdC non ammette alcuna soluzione definita in un intorno destro di $t=0$.

Per assurdo, suppongo che esista $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ con $a \le 0 < b$ t.c. $(\varphi, [a, b])$ sia sol. di (1)

Quindi: φ è derivabile e

$$\forall t \in [a, b]: \quad \varphi'(t) = h(\varphi(t))$$

In particolare: $\varphi'(0) = h(\underbrace{\varphi(0)}_{= x_0}) = h(x_0) = 1$

(φ risolve il PdC, quindi soddisfa la condizione iniziale)

$\Rightarrow \varphi'(0) = 1 > 0 \qquad \varphi'(0) := \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0}$

TPS

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $\forall t \in]0, \delta[: \quad \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\underbrace{t}_{>0}} > 0$

$\Rightarrow \forall t \in]0, \delta[: \quad \varphi(t) - \varphi(0) > 0$

$\Rightarrow \boxed{\forall t \in]0, \delta[: \quad \varphi(t) > \varphi(0)} \; (= x_0)$

$\Rightarrow \forall t \in]0, \delta[: \quad \underbrace{h(\varphi(t))}_{= \varphi'(t)} = 0$ perché φ risolve $y' = h(y)$

$\Rightarrow \forall t \in]0, \delta[: \quad \varphi'(t) = 0$!!!

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \varphi_{|]0,\delta[} \text{ è costante} \\ \varphi_{|[0,\delta[} \text{ è continua} \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\forall t \in [0,\delta[: \\ \varphi(t) = \varphi(0)\end{array}} = x_0$$

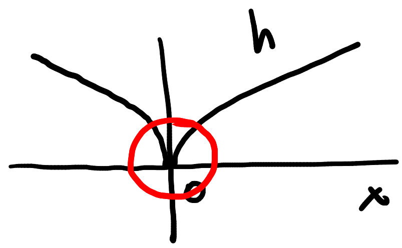
$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} =: f(t,y) \qquad dom(f) = \mathbb{R}^2$$

$\varphi(t) \equiv 0$ è sol.

$\psi(t) = t^3, \ t \in \mathbb{R}$ è sol.

$$\left(\begin{array}{l} 0^3 = 0 \ \checkmark \\ \psi'(t) = 3t^2 \\ \quad = 3(t^3)^{2/3} \\ \quad = 3(\psi(t))^{2/3} \end{array} \right)$$

$h(x) = 3x^{2/3}$



Dimostro l'equiv. tra PdC di ordine n e PdC vettoriale di ordine 1.

Considero una soluzione del PdC (2):

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ t.c.

- φ deriv. n volte in I
- $\forall t \in I : \ (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in I : \ \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$
- $\varphi(t_0) = x_1^0, \ \dots, \ \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$

Sia $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ la funzione vettoriale di componenti

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \dots, \quad \varphi_n := \varphi^{(n-1)}$$

[maiuscolo invece di grassetto]

Devo dimostrare che Φ risolve il PdC vettoriale

$$(3) \qquad Y' = F(t, Y), \qquad Y(t_0) = X_0$$

dove $X_0 = (x^0_1, \dots, x^0_n)$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è la funzione vettoriale di componenti

$$f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_2$$
$$f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_3$$
$$\vdots$$
$$f_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n$$
$$f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

secondo membro dell' eq. di ordine n

Osservo che $\underbrace{\varphi_1}_{=\varphi}$ è derivabile n volte; $\underbrace{\varphi_2}_{=\varphi'}$ è derivabile $n-1$ volte; .... ; $\underbrace{\varphi_{n-1}}_{=\varphi^{(n-2)}}$ è derivabile 2 volte; $\underbrace{\varphi_n}_{=\varphi^{(n-1)}}$ è derivabile.

Perciò: tutte le φ_i sono derivabili in I, quindi lo è la funzione vettoriale Φ. ✓

Preso $t \in I$:

per definizione di $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — perché φ risolve (2)

$$(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) = (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega \checkmark$$

Fisso $t \in I$ e verifico se vale l'uguaglianza

$$\Phi'(t) = F(t, \Phi(t)) \qquad \odot$$

Calcolo separatamente 1° e 2° membro.

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}'(t) \\ \varphi_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \varphi_1 := \varphi \\ \varphi_2 := \varphi' \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} := \varphi^{(n-2)} \\ \varphi_n := \varphi^{(n-1)} \end{cases}$$

$$F(t, \Phi(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ f_2(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ f_n(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{pmatrix}$$

per come sono definite $f_1, \dots, f_n$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \\ f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 := \varphi \\ \varphi_2 := \varphi' \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} := \varphi^{(n-2)} \\ \varphi_n := \varphi^{(n-1)} \end{cases} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \\ f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix}$$

Confronto : vettori evidenziati in rosso :

- le prime $n-1$ righe sono identiche ;
- l'ultima riga coincide , perché φ risolve (2), e quindi per ogni $t \in I$:

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

L'uguaglianza $\odot$ è così dimostrata.

Per la condizione iniziale:

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_2(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_0) \end{pmatrix} \overset{\odot}{=} \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \overset{\varphi \text{ risolve } (2)}{=} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = X_0$$

Ho quindi dimostrato che (Φ, I) risolve (3).

l'ho aggiunto

Viceversa: suppongo che $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sia soluzione definita in I dell' eq. vettoriale, che equivale al sistema

$$\begin{cases} \varphi_1' = \varphi_2 \\ \varphi_2' = \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}' = \varphi_n \\ \varphi_n' = f(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \end{cases}$$

Definisco $\varphi := \varphi_1$ e provo che φ risolve (2).

Anzitutto, φ è derivabile (perché φ_1 lo è).

Poi:

$$\varphi' = \varphi_1' \overset{\text{dal sistema}}{=} \varphi_2 \,, \quad \text{e} \quad \varphi_2 \ \text{è derivabile, quindi:}$$

φ' è derivabile, ossia: φ è derivabile due volte.

Poi:

$$\varphi'' = \varphi_2' \overset{\text{dal sistema}}{=} \varphi_3 \,,$$

e come sopra deduco che φ è derivabile tre volte.

Ripetendo arrivo a

$$\varphi^{(n-1)} = \varphi_{n-1}' \overset{\text{dal sistema}}{=} \underbrace{\varphi_n}_{\text{derivabile}} \,,$$

per cui φ è derivabile n volte

e

$$\varphi^{(n)}(t) = \varphi_n'(t) \overset{\text{dal sistema}}{=} f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

$$= f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

Le restanti verifiche sono immediate. $\square$

Es. (di sistema di eq. di ordine 2 che si trasforma in un sistema di eq. di ordine 1)

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x', y, y', z, z') \\ y'' = g(t, x, x', y, y', z, z') \\ z'' = h(t, x, x', y, y', z, z') \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}$$

Pongo $u_1 := x$, $u_2 = x'$, $u_3 = y$, $u_4 = y'$, $u_5 = z$, $u_6 = z'$ e ho:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 & =: v_1(t, u_1, \dots, u_6) \\ u_2' = f(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) & =: v_2(\quad) \\ u_3' = u_4 & =: v_3(\quad) \\ u_4' = g(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) & =: v_4(\quad) \\ u_5' = u_6 & =: v_5(\quad) \\ u_6' = h(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) & =: v_6(\quad) \end{cases}$$

$$U' = V(t, U) \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_6 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix}$$

Dimostro la prop. sulla regolarità.

Suppongo f continua in Ω

Considero $\varphi : I \to \mathbb{R}$ soluz. di $y' = f(t, y)$ $(*)$.

Per def. di soluzione:

$$\forall t \in I : \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

continua (composta di funz. continue)

continua per i.p.

derivabile $\Rightarrow$ continua

$$\Rightarrow \varphi' \text{ continua } \Rightarrow \varphi \in C^1.$$

Per la 2ª affermazione, procedo per induzione.

Per $k = 0$, la proprietà è già dimostrata.

Suppongo che la proprietà sia vera per un certo k e dimostro che è vera per $k+1$.

Suppongo quindi: $f \in C^{k+1}$ (e provo che $\varphi \in C^{k+2}(I, \mathbb{R}^n)$)

f è di classe C^{k+1} $\Rightarrow$ f è di classe C^k

ipotesi induz.

$\Rightarrow$ φ è di classe C^{k+1}

Osserva che $\forall t \in I$: $\quad \varphi'(t) = \overbrace{\underbrace{f}_{\in C^{k+1}}(t, \underbrace{\varphi(t)}_{\in C^{k+1}})}^{\in C^{k+1}}$

$\Rightarrow \varphi'$ è di classe C^{k+1}

$\Rightarrow \varphi$ è di classe C^{k+2}. $\square$

Sulla lipschitzianità di f e delle sue componenti:

Oss: $\quad \forall i$: $\quad |x_i| \leq \|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2} \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j|$

$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| \leq \|f(t,x) - f(t,y)\|_{\mathbb{R}^m} \leq L \|x-y\|_{\mathbb{R}^n}$$

Se $\forall i \quad \exists L_i > 0$ t.c.

$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| \leq L_i \|x-y\| \qquad \forall \begin{matrix}(t,x) \\ (t,y)\end{matrix} \in \Omega$$

allora:

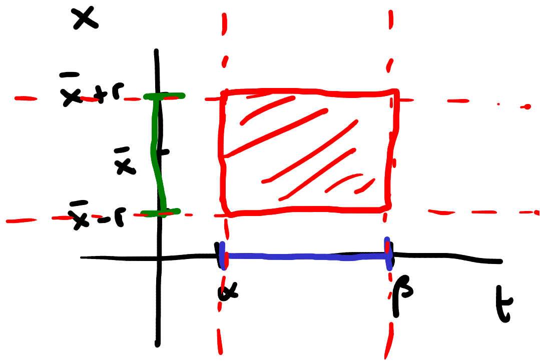
$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(t,x) - f_i(t,y)|$$
$$\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} L_i\right)}_{=:L} \|x-y\| \qquad \square$$

$$\Gamma = [\alpha,\beta]\times \bar{B}_r(\bar{x})$$

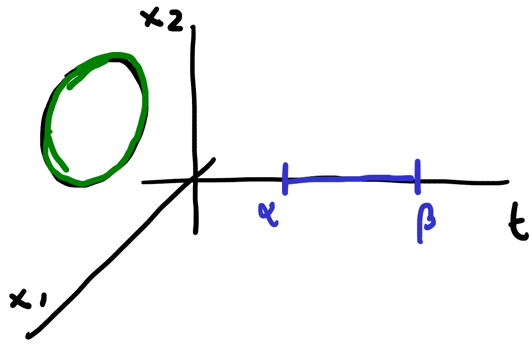
$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}\le r\}$$

$n=1$: $\bar{B}_r(\bar{x}) = [\bar{x}-r,\ \bar{x}+r]$

$$\Gamma = [\alpha,\beta]\times[\bar{x}-r,\ \bar{x}+r]$$



$n=2$:



Dimostro la prima cond. suff. per la loc. lip. $(m=1)$

Fisso $\Gamma = [\alpha,\beta]\times \underbrace{\bar{B}_r(\bar{x})}_{=:B} \subset \Omega$

Per ipotesi: esistono $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ in Ω e sono continue

Γ compatto, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ continua $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ è limitata

$$\Rightarrow \exists\, L\in\mathbb{R}_+^* \text{ t.c. } \forall (t,x)\in\Gamma:\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)\right)^2} \le L$$

Fisso $t\in[\alpha,\beta]$; definisco $g: B\to\mathbb{R}$ t.c.

$$g(x) = f(t,x)$$

Osservo che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)$

$\Rightarrow$ g è differenziabile in B

Fisso $x, y \in B$: il segmento che congiunge x e y è contenuto in B

Applico il teor. del valor medio :

$\exists z$ appartenente al segmento che congiunge x e y t.c.

$$g(x) - g(y) = \nabla g(z) \cdot (x - y)$$

$$\Rightarrow \quad |g(x) - g(y)| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\nabla g(z)\|_{\mathbb{R}^n} \, \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$g(x) = f(t,x), \qquad g(y) = f(t,y)$$

$$\|\nabla g(z)\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(z)\right)^2} = \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \underbrace{z}_{\in \Gamma})\right)^2}}_{\leq L}$$

Quindi: $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $\forall \, x, y \in B$:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \qquad \square$$