$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$|x| = 1$

$x = -1$ $\quad f_n(-1) = (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}$

$\sum_n \frac{1}{n}$ div. $\quad \Bigg| \Rightarrow$ la serie non converge

$x = 1$: $\quad f_n(1) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ conv. (Leibniz) $\quad \Bigg| \Rightarrow$ la serie converge

$|x| < 1$: $\quad |f_n(x)| = \left|(-1)^n \frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$

$\sum_n |x|^n$ converge $\quad \Bigg) \Rightarrow$

(geom. $q = |x| \in [0,1[$)

la serie converge assol.

$|x| > 1$: $\quad |f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ $\quad$ (gerarchia infiniti)

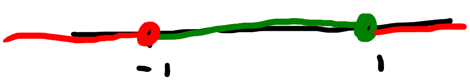
progr. geom. $q > 1$

potenza

$\Rightarrow |f_n(x)| \not\to 0 \iff f_n(x) \not\to 0$

$\Rightarrow$ la serie non converge

conv. punt.



conv. assol.

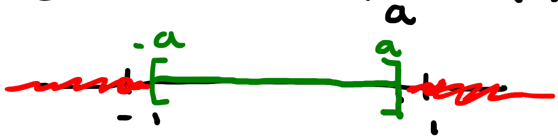
Per la conv. totale: siccome non c'è conv. assol. in ± 1 e le f_n sono continue in $[-1,1]$, per le osserv. fatte nella scorsa lezione posso

escludere che ci sia conv. totale in $]-1,1[$.
Fisso $a \in]0,1[$; $\forall n$:

$$\left.\begin{array}{l} \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \frac{|x|^n}{n} = \frac{a^n}{n} \\ \sum_n \frac{a^n}{n} \text{ conv. } \left(a \in]-1,1[, \text{ dove ho conv. assoluta} \right) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\sum_n \sup_{[-a,a]} |f_n|$ converge, ossia:
la serie conv. totalm. in $[-a,a]$.

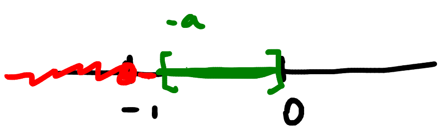
conv. totale (e unif.)



Per la conv. uniforme, ragiono separatamente in $]-1,0]$ e $[0,1]$

Per il "solito ragionamento", posso escludere che la serie conv. unif. in $]-1,0]$
(più precisamente: in intorni destri di -1)
Quindi: c'è conv. unif. in $[-a,0]$ $\forall a \in]0,1[$
(perché c'è conv. totale).

conv. unif.



In $[0,1]$:
siccome la serie conv. punt. nell'intervallo chiuso, non posso escludere che converga uniformemente.
So già (per la conv. totale) che la serie conv. unif. in $[0,a]$. con $a \in]0,1[$;
verifico se conv. unif. dappertutto.

Oss: $\forall x \in [0,1]$: $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$ $=: g_n(x)$

- $g_n(x) \geq 0$
- $g_n(x) \to 0$ (già visto)
- $g_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x^n$ decrescente

decresc. (risp. a n) decres.

$\Rightarrow$ $\forall x \in [0,1]$ sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Leibniz.

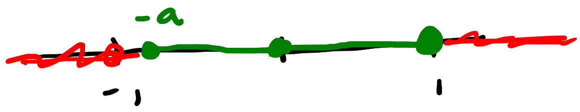
Quindi: la serie conv. unif. in $[0,1]$ se e solo se $\{f_n\}$ conv. unif. a $f \equiv 0$ in $[0,1]$.

$$\forall n: \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|x|^n}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sup_{[0,1]} |f_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Quindi: $f_n \to 0$ unif. in $[0,1]$, dunque la serie di termine f_n conv. unif. in $[0,1]$

conv. unif



Conclusione:

conv. punt. $]-1,1]$

assol. $]-1,1[$

unif. $[-a,1]$ $\forall a \in]0,1[$

tot. $[-a,a]$

$$f_n(x) = (-1)^n \underbrace{\frac{x^4}{n+x^4}}_{=:g_n(x)} \qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}^*$$

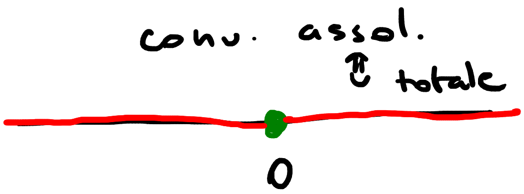
$$|f_n(x)| = \frac{x^4}{n+x^4}$$

$x=0$: $\quad |f_n(0)|=0 \quad \forall n \implies$ la serie conv. (assol.)

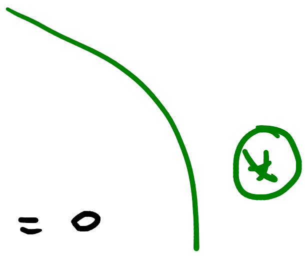
$x\neq 0$: $\quad |f_n(x)| \sim x^4\cdot\frac{1}{n}$

$\sum_n \frac{1}{n}$ div. $\implies \sum_n x^4\cdot\frac{1}{n}$ div. $\quad \Big| \overset{\text{confr. as.}}{\implies} \sum_n |f_n(x)|$ diverge

$\implies \sum_n f_n(x)$ non conv. assolut.



Osservo che $\forall x\in\mathbb{R}$:



- $g_n(x) = \dfrac{x^4}{n+x^4} \geq 0$
- $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^4}{\underbrace{n+x^4}_{\to+\infty}} = 0$
- $g_{n+1}(x) = \dfrac{x^4}{n+1+x^4} \leq \dfrac{x^4}{n+x^4} = g_n(x) \quad \forall n$

  $\implies \{g_n(x)\}_n$ è decrescente.

Quindi: $\forall x\in\mathbb{R}$ sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Leibniz, perciò:

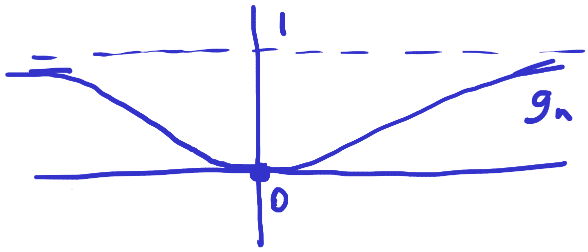
- $\forall x\in\mathbb{R}$: $\sum_n f_n(x)$ converge $\qquad$ conv. punt.
- $\sum_n f_n$ conv. unif. (in $\mathbb{R}$ o un suo sottoinsieme)

  $\iff f_n \to 0$ unif. (in $\mathbb{R}$ o un suo sottoins.)

Verifico se $\{f_n\}$ conv. unif. a $f \equiv 0$

Fisso n:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} g_n(x)$$



$$g_n(x) = \frac{x^4}{n+x^4} = \frac{x^4+n-n}{n+x^4} = 1 - \underbrace{\frac{n}{n+x^4}}_{\uparrow} \uparrow$$

$\uparrow$ per $x \geq 0$

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} g_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n| = 1 \neq 0$$

Quindi: $f_n \not\to 0$ unif. in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_n f$ non conv. unif. in $\mathbb{R}$.

(e la "colpa" è di $\pm\infty$)

Fisso $a > 0$; $\forall n$:

monotonia di g_n

$$\sup_{x \in [-a,a]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,a]} g_n(x) = g_n(a)$$

$\uparrow$ simm.

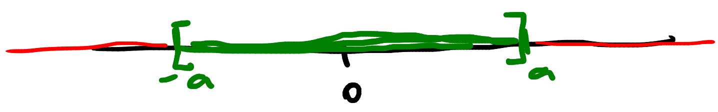
$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sup_{[-a,a]} |f_n| = \lim_{n \to +\infty} g_n(a) \overset{(*)}{=} 0$$

Dunque:

$f_n \to 0$ unif. in $[-a,a]$

$\Rightarrow \sum_n f_n$ conv. unif. in $[-a,a]$

conv. unif.



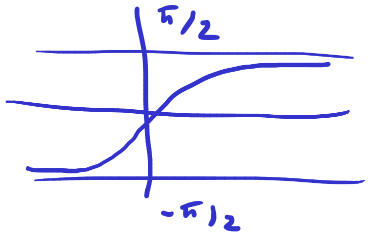
$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^{2n})}{x^n} > 0 \qquad x \in \,]0, +\infty[\qquad n \in \mathbb{N}$$

$\forall n$: $\quad f_n(1) = \dfrac{\arctan(1)}{1} = \pi/4 \quad \Rightarrow \sum_n f_n(1)$ non converge

$x \in \,]0,1[$: $\quad x^{2n} \to 0 \, ; \quad t \to 0: \arctan(t) \sim t$

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) = \dfrac{\arctan(x^{2n})}{x^n} \sim \dfrac{x^{2n}}{x^n} = x^n \\ \sum_n x^n \text{ conv. (geom. } q = x \in \,]0,1[\,) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\sum_n f_n(x)$ converge.



$x \in \,]1, +\infty[$: $\quad x^{2n} \to +\infty$

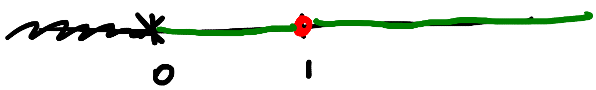
$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^{2n})}{x^n} \leq \frac{\pi/2}{x^n}$$

$$\sum_n \frac{1}{x^n} = \sum_n \left(\frac{1}{x}\right)^n \text{ conv.}$$

$x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$

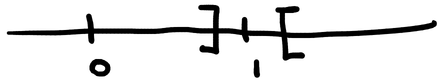
$$\xRightarrow{\text{mult.}} \sum_n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^n} \text{ conv.} \xRightarrow{\text{confr.}} \sum_n f_n(x) \text{ conv.}$$

Conclusione: $\quad$ conv. punt. $\equiv$ conv. assol.



Dato che ciascuna f_n è continua in $x = 1$ e la serie non conv. punt. / assol. in $x = 1$, posso escludere che la serie converga unif. / total. in intorni di $x = 1$.

Fisso $0<a<1<b$ e considero $]0,a]\cup[b,+\infty[$.



Ragiono separatamente sui due intervalli.
Inizio da $[b,+\infty[$.

$x \geq b \Rightarrow \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{b^n}$

Fisso n;

$$\left.\begin{array}{l} \forall x\in[b,+\infty[\,:\, |f_n(x)| = \dfrac{\arctan(x^{2n})}{x^n} \leq \dfrac{\pi/2}{b^n} =: M_n \\ \displaystyle\sum_n M_n \text{ converge } (b>1) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\sum_n f_n$ conv. totalm. (quindi unif.) in $[b,+\infty[$.

Ora considero $]0,a]$.
Noto che non riesco a maggiorare come nel caso precedente. Cerco di determinare proprio il sup di $|f_n|$ in $]0,a]$. Fisso n.

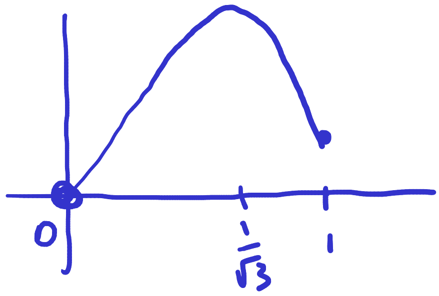
$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^{2n})}{x^n}$$

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^{4n}}\cdot 2n x^{2n-1}\cdot x^n - \arctan(x^{2n})\, n x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= \underbrace{\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}}}_{>0}\Bigg(\underbrace{\frac{2x^{2n}}{1+x^{4n}} - \arctan(x^{2n})}_{=g(x^{2n})\ >0\ ??}\Bigg)$$

$$g(t) := \frac{2t}{1+t^2} - \arctan(t), \quad t\in[0,1] \quad (t = x^{2n})$$

$g(0) = 0 \qquad g(1) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$



$$g'(t) = \frac{2(1+t^2) - 4t^2}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{2 + 2t^2 - 4t^2 - 1 - t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 - 3t^2}{(1+t^2)^2} \geq 0 \iff 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

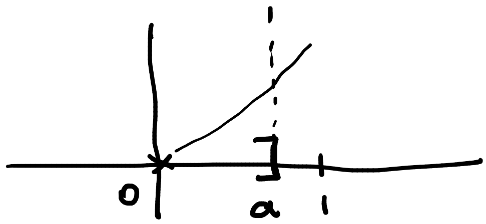
$\Rightarrow \; g(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \; g(x^{2n}) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1], \; \forall n$

Dunque: $f_n'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0,1] \quad \forall n$

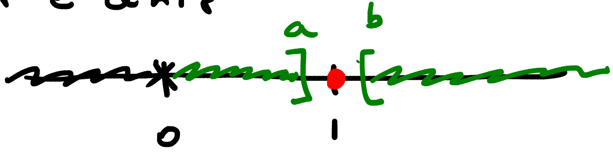
$\Rightarrow \sup_{]0,a]} |f_n| = f_n(a)$

$\sum_n f_n(a)$ converge $(a \in]0,1[\,)$ $\Rightarrow$



$\sum_n f_n$ conv. totalm. ($\Rightarrow$ unif.) in $]0,a]$

tot e unif



Motivazione per le prop. della somma di una serie

$S_n := f_0 + f_1 + \dots + f_n$

limit. limit. limit.

limitata

$\sum_n f_n$ conv. unif. e ha somma f

$\Updownarrow$ def

$S_n \to f$ unif.

$\Downarrow$

f è limitata

$\forall n: \quad f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont.

$S_n := f_0 + f_1 + \dots + f_n$ cont.

$$\left.\int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx \right] \circledast$$

linearità dell'integrale rispetto alla somma

$\sum_n f_n$ conv. unif. e ha somma f $\iff$

$S_n \to f$ unif. $\overset{\text{TPLSSI}}{\Longrightarrow}$

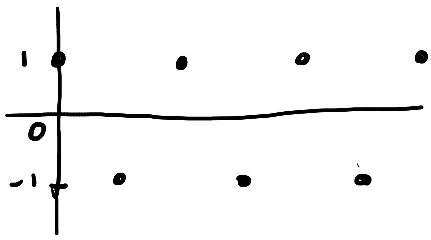
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx \overset{\circledast}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

definizione di somma di una serie

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

Esempi su massimo limite e minimo limite

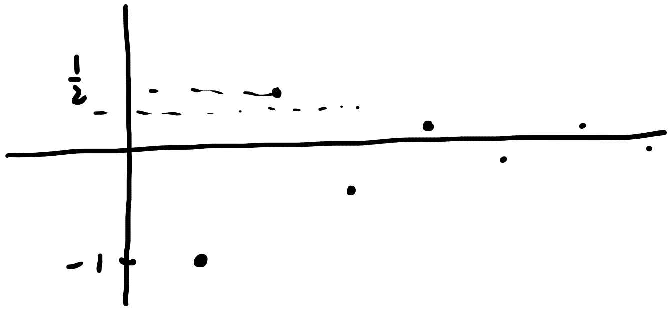
- $x_n = (-1)^n$



$$\mathcal{M}^* = [1, +\infty[\implies \limsup_{n\to+\infty} x_n = 1$$

$$\mathcal{M}_* =]-\infty, -1] \implies \liminf_{n\to+\infty} x_n = -1$$

• $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$



$\mathcal{M}^* =]0,+\infty[\quad \Rightarrow \quad \lim''_{n\to+\infty} x_n = \inf]0,+\infty[= 0$

$\mathcal{M}_* =]-\infty,0[\quad \Rightarrow \quad \lim'_{n\to+\infty} x_n = \sup]-\infty,0[= 0$

Esempi di "disuguaglianze strette"

$x_n: \quad 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \qquad (x_n = (-1)^{n-1})$

$y_n: \quad -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots \qquad (y_n = (-1)^n)$

$\lim''_n x_n = 1 \qquad \lim''_n y_n = 1$

$\Rightarrow \lim'' x_n + \lim'' y_n = 2$

$x_n + y_n: \quad 0, 0, 0, 0, \ldots \qquad \underline{0 < 2}$

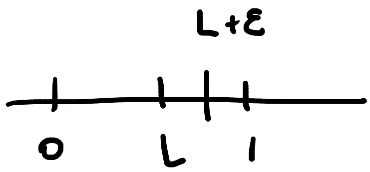
$\Rightarrow \lim'' (x_n + y_n) = 0$

$x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ pari} \\ 3 & n \text{ disp.} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} 3 & n \text{ pari} \\ 2 & n \text{ disp.} \end{cases}$

$\lim'' x_n \cdot \lim'' y_n = 3 \cdot 3 = 9$

$\lim'' \underset{\equiv 6}{(x_n \cdot y_n)} = 6$

Dim. il crit. della radice.



Suppongo $L \in [0,1[$.

Fisso $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ t.c. $L+\varepsilon < 1$

Per $(i)^*$: $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \nu$: $\sqrt[n]{|x_n|} < L+\varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \forall n \geq \nu: \ |x_n| < (L+\varepsilon)^n \\ \sum_n (L+\varepsilon)^n \text{ conv.} \\ \qquad (\text{geom. } q = L+\varepsilon \in]0,1[) \end{array}\right\} \overset{\text{crit. confr.}}{\Longrightarrow}$$

$\sum_n |x_n|$ conv. $\iff$ $\sum_n x_n$ conv. assol.

Suppongo $L \in]1,+\infty]$

$L = +\infty$ $\overset{\mathcal{M}^* = \emptyset}{\Longrightarrow}$ 1 non è magg. definitivo

$\Rightarrow$ frequent. $\sqrt[n]{|x_n|} > 1$

$\Rightarrow$ freq. $|x_n| > 1$

$L \in]1,+\infty[$, fisso $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ t.c. $L-\varepsilon > 1$

$\overset{(ii)^*}{\Longrightarrow}$ freq. $\sqrt[n]{|x_n|} > L-\varepsilon > 1$

$\Rightarrow$ freq. $\sqrt[n]{|x_n|} > 1$ $\Rightarrow$ freq. $|x_n| > 1$

In entrambi i casi:

$|x_n| > 1$ freq.

$\Rightarrow$ $|x_n| \not\to 0$ $\Rightarrow$ $x_n \not\to 0$

$\Rightarrow \sum_n x_n$ non converge. $\square$