10 ottobre 2023

Verifico che la conv. assoluta implica la conv. punt. se $(Y, \|\cdot\|_Y)$ è di Banach.

$\sum_n f_n$ conv. assol. in $X \overset{def}{\iff}$

$\forall x \in X$: $\sum_n \|f_n(x)\|_Y$ conv. $\iff$

$\forall x \in X$: $\sum_n \underbrace{f_n(x)}_{\in Y}$ conv. normalmente in $\underbrace{(Y, \|\cdot\|_Y)}_{\text{Banach}}$

$\Rightarrow$ $\forall x \in X$: $\sum_n f_n(x)$ conv. in $(Y, \|\cdot\|_Y)$

$\overset{def}{\iff}$ $\sum_n f_n$ conv. punt. in X. $\square$

Verifico che la conv. totale implica la conv. unif. se $(Y, \|\cdot\|_Y)$ è sp. di Banach.

$\sum_n f_n$ conv. totalmente in X $\overset{def}{\iff}$

$\sum_n \sup_{x \in X} \|f_n(x)\|_Y$ converge $\iff$ $f_n \in B(X,Y)$

$\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge $\iff$

$\sum_n f_n$ converge normalmente nello spazio $(B(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$, che è di Banach (perché $(Y, \|\cdot\|_Y)$ lo è)

$\Rightarrow$ $\overbrace{\sum_n f_n}^{\text{serie nello sp. } (B(X,Y),\, \|\cdot\|_\infty)}$ converge nello spazio $(B(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$

$\iff$ $\underbrace{\sum_n f_n}_{\text{serie di funzioni}}$ conv. uniform. in X. $\square$

$$f_n(x) = \underbrace{\frac{\ln(1+x^{2n})}{n^2+1}}_{\geq 0} \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$ conv. punt. $\equiv$ conv. assol.

Se $|x| = 1$:
$$f_n(x) = \frac{\ln(2)}{n^2+1}$$

$\frac{\ln(2)}{n^2+1} \sim \ln(2) \cdot \frac{1}{n^2}$, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ conv.

$\overset{\text{mult.}}{\Rightarrow}$ $\sum_n \ln(2) \frac{1}{n^2}$ conv.

$\overset{\text{confr. as.}}{\Rightarrow}$ $\sum_n \frac{\ln(2)}{n^2+1}$ conv.

Se $|x| < 1$:

$x = 0$: $f_n(0) = 0 \quad \forall n \Rightarrow \sum_n f_n(0)$ conv.

$x \neq 0$:
$$f_n(x) = \frac{\ln(1+\overbrace{x^{2n}}^{\to 0})}{n^2+1} \sim \frac{x^{2n}}{n^2+1} \leq x^{2n}$$

$t \to 0$: $\ln(1+t) \sim t$

$\sum_n x^{2n}$ conv. (geom. di ragione $x^2 \in]0,1[$)

$\overset{\text{cr. confr.}}{\Rightarrow}$ $\sum_n \frac{x^{2n}}{n^2+1}$ conv. $\overset{\text{confr. asint.}}{\Rightarrow}$ $\sum_n f_n(x)$ conv.

Se $|x| > 1$: $x^{2n} \to +\infty \Rightarrow 1 + x^{2n} \sim x^{2n}$

$\overset{?\ \text{ok}}{\Rightarrow}$ $\ln(1+x^{2n}) \sim \ln(x^{2n})$

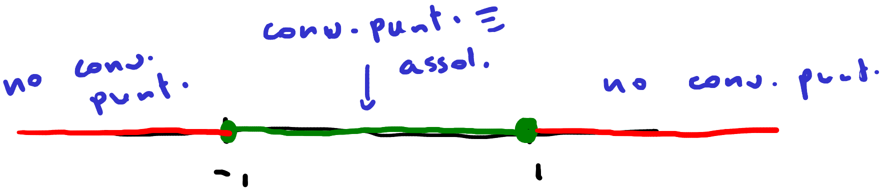
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1+t)}{\ln(t)} \overset{H}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{1+t} = 1 \quad \odot$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+x^{2n})}{\ln(x^{2n})} \overset{\odot}{=} 1 \quad \Rightarrow \ln(1+x^{2n}) \sim \ln(x^{2n})$$

Quindi:
$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x^{2n})}{n^2+1} \sim \frac{\ln(x^{2n})}{n^2+1} = \frac{2n \ln|x|}{n^2+1}$$
$$\sim \frac{2n \ln|x|}{n^2} = \frac{2\ln|x|}{n}$$

$$\sum_n \frac{1}{n} \text{ div. pos.} \overset{\text{mult.}}{\Longrightarrow} \sum_n \frac{2\ln|x|}{n} \text{ div. pos.}$$

$$\overset{\text{conf. as.}}{\Longrightarrow} \sum_n f_n(x) \text{ div. pos.}$$

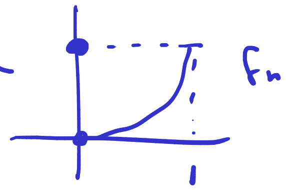


Verifico se in $[-1,1]$ la serie conv. totalmente.

Fisso n; $\displaystyle \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{\ln(1+x^{2n})}{n^2+1}$

funz. pari

$$= \sup_{x\in[0,1]} \frac{\ln(1+x^{2n})}{n^2+1} = \frac{\ln(2)}{n^2+1}$$



Quindi:
$$\sum_n \sup_{[-1,1]} |f_n| = \underbrace{\sum_n \frac{\ln(2)}{n^2+1}}_{\substack{\text{Converge} \\ \text{(già visto)}}}$$

perciò: la serie data conv. totalmente in $[-1,1]$. □

$$\sum_n \underbrace{\frac{\ln(1+x^{2n})}{n+1}}_{\geq 0 \ \forall x} \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ punt. $\equiv$ assol.

se $|x| = 1$: $\quad f_n(x) = \dfrac{\ln(2)}{n+1} \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$

$$\sum_n \frac{1}{n} \text{ div.} \overset{\text{mult.}}{\Longrightarrow} \sum_n \frac{\ln(2)}{n} \text{ div.} \overset{\text{confr. as.}}{\Longrightarrow} \sum_n \frac{\ln(2)}{n+1}$$

diverge

se $|x| < 1$:

$x = 0$: come prima

$x \neq 0$:

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x^{2n})}{n+1} \overset{x^{2n} \to 0}{\sim} \frac{x^{2n}}{n+1} \leq x^{2n}$$

.... $\sum_n f_n(x)$ converge

Se $|x| > 1$:

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x^{2n})}{n+1} \overset{x^{2n} \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(x^{2n})}{n+1} = \frac{2n \ln|x|}{n+1} \to 2\ln|x| \neq 0$$

$$\left(\sim 2\ln|x| \ (>0)\right)$$

Quindi:

è violata la cond. nec. per la convergenza

$\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ non conv.

Conclusione :

la serie conv. punt. ($\equiv$ assol.) in $]-1, 1[$

(e non conv. altrove)

Osservazione su conv. unif e totale di serie di funzioni continue

① $\sum_n f_n$ conv. totalm. in X $\overset{def}{\iff}$ $\sum_n \sup_{x\in X} \|f_n(x)\|_Y$

$\sum_n f_n$ conv. unif. in X $\overset{def}{\iff}$ $\{S_n\}$ conv. unif. in X ($S_n := f_0 + f_1 + \dots + f_n$)

$\underset{\text{se } (Y, \|\cdot\|_Y) \text{ Banach}}{\iff}$ $\{S_n\}$ soddisfa la CCU in X

$\iff \lim_{n,m\to+\infty} \sup_{x\in X} \|S_n(x) - S_m(x)\|_Y = 0$

Quindi: lo studio di conv. unif. e/o tot. in X coinvolge la determinazione del sup in X di funzioni continue in X.

② (X, d) sp. metrico, $\bar{x} \in X \cap Dr(X)$

$g: X \to \mathbb{R}$, g continua in $\bar{x}$

$$\underbrace{\sup_{x\in X} g(x)}_{=:\alpha} \overset{?}{=} \underbrace{\sup_{x\in X\setminus\{\bar{x}\}} g(x)}_{=:\beta}$$

$\bar{x} \in Dr(X) \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset X\setminus\{\bar{x}\}$ t.c. $x_n \to \bar{x}$

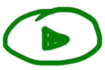
$g(\bar{x}) \underset{\substack{g \text{ continua} \\ \text{in } \bar{x}}}{=} \lim_n \underbrace{g(x_n)}_{\leq \beta} \Rightarrow g(\bar{x}) \leq \beta$

$$\alpha := \sup_{x\in X} g(x) = \max\Big\{ \overbrace{\sup_{x\in X\setminus\{\bar{x}\}} g(x)}^{=:\beta}, \overbrace{g(\bar{x})}^{\leq \beta} \Big\} = \beta \quad \square$$

Dunque: se g è continua in X, calcolare il sup di g in X, oppure in X privato di uno (o più*) punti di accumulazione produce lo stesso risultato. * in numero finito

Quindi: se una serie di funzioni continue in X converge unif/tot in X privato di un numero finito di punti di accumulazione, allora converge unif/tot. in X.

Dunque: se la serie non può conv. unif/tot in tutto X, non può farlo nemmeno in X privato di qualche punto di accumulazione.



Per le osservazioni fatte:

siccome f_n è continua in $[-1,1]$ (in $\mathbb{R}$)

se $\sum_n f_n$ convergesse unif/tot. in $]-1,1[$

dovrebbe convergere unif/tot in $[-1,1]$,

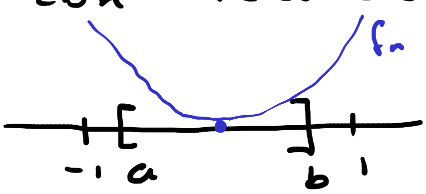
quindi dovrebbe convergere punt/assol. in $[-1,1]$,

cosa non vera!

Conclusione: la serie <u>non</u> conv. unif/tot. in $]-1,1[$.

Proviamo a "recuperare" la conv. unif/tot. in intervalli del tipo $[a,b]$, con $-1<a<b<1$

Fissato n:



$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \max\{f_n(a), f_n(b)\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_n f_n(a) \text{ conv.} & (a \in]-1,1[\,) \\ \sum_n f_n(b) \text{ conv.} & (b \in]-1,1[\,) \end{array}\right) \Rightarrow \sum_n \max\{f_n(a), f_n(b)\} \text{ converge}$$

$\Leftrightarrow$ $\sum_n \sup_{[a,b]} |f_n|$ converge

$\Leftrightarrow$ $\sum_n f_n$ conv. tot. (e quindi unif.) in $[a,b]$.

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{n}{\underbrace{x^{2n}+1}_{>0}} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Se $|x| = 1$: $\quad f_n(x) = (-1)^n \frac{n}{2} \not\to 0$

$\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ non conv.

Se $|x| < 1$: $\quad f_n(x) = (-1)^n \dfrac{\overbrace{n}^{\to +\infty}}{\underbrace{\underbrace{x^{2n}}_{\to 0}+1}_{\to 1}} \not\to 0$

Se $|x| > 1$: provo a vedere se conv. assolutamente:

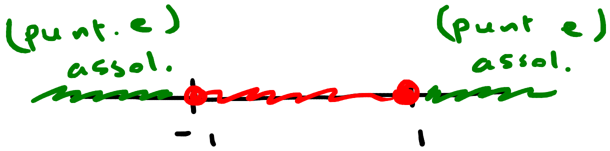
Uso il crit. del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{x^{2n+2}+1} \cdot \frac{x^{2n}+1}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{x^{2n}}^{\to+\infty}+1}{\underbrace{x^{2n+2}}_{\to+\infty}+1}}_{\sim \frac{x^{2n}}{x^{2n+2}}} = \frac{1}{x^2} \underset{|x|>1}{<} 1$$

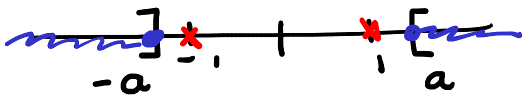
$\Rightarrow$ la serie $\sum_n |f_n(x)|$ converge.

Dato che ciascuna f_n
è continua in $]-\infty,-1]$
e $[1,+\infty[$, posso escludere che ci sia conv. unif / totale in $]-\infty,-1[$ e in $]1,+\infty[$.



Per "recuperare" conv. unif / totale devo "allontanarmi" da -1 e da 1.

Fisso $a>1$ e considero
$X_a :=]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$



Fisso n;
$$\sup_{x\in X_a} |f_n(x)| = \sup_{x\in X_a} \frac{n}{x^{2n}+1}$$

$$\text{simm.} \nearrow = \sup_{x\in[a,+\infty[} \frac{n}{x^{2n}+1} = \frac{n}{a^{2n}+1} = |f_n(a)|$$

$$\Rightarrow \sum_n \sup_{X_a} |f_n| = \sum_n |f_n(a)| \text{ converge.}$$

$\uparrow a \in]1,+\infty[$

$\uparrow$ qui la serie conv. assol.

Conclusione:

la serie data conv. punt. e assol. in
$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ e conv. unif./tot.
negli intervalli del tipo $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$
con $a>1$. $\square$

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2} \qquad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*$$

$\forall n$: $f_n(0)=0 \Rightarrow \sum_n |f_n(0)|$ conv.

Per $x\neq 0$: $|f_n(x)| = \dfrac{|x|}{x^2+n^2} \sim |x|\cdot\dfrac{1}{n^2}$

$$\sum_n \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \overset{\text{mult.}}{\Longrightarrow} \sum_n |x| \cdot \frac{1}{n^2} \text{ conv.}$$

$$\overset{\text{cfr. as.}}{\Longrightarrow} \sum_n |f_n(x)| \text{ conv.}$$

conv. ass.

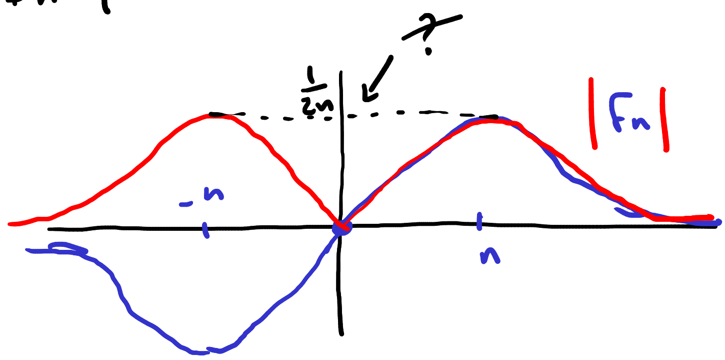
Conv. totale ?

Fisso n :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{x^2+n^2} \right| = (*)$$

$$f_n'(x) = \frac{x^2+n^2 - x \cdot 2x}{(x^2+n^2)^2}$$

$$= \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2} \geq 0 \iff |x| \leq n$$



$$(*) = f_n(n) = \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$$

Quindi: $\sum_n \sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \sum_n \frac{1}{2n}$ non converge!!

$\Rightarrow$ la serie NON conv. totalm. in $\mathbb{R}$

Osservo che

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

cioè: $\{f_n\}$ conv. a $f \equiv 0$ unif. in $\mathbb{R}$

cioè: la cond. necessaria per la conv. unif. della serie di termine f_n è soddisfatta.

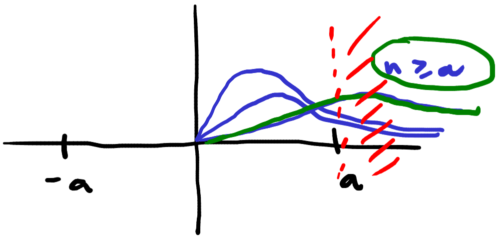
In questo momento: non posso né escludere né affermare che $\sum_n f_n$ converga uniform. in $\mathbb{R}$.

Cerco di "recuperare" la conv. totale.

Osservo che $\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = f_n(\pm n)$ e $\pm n \to \pm\infty$

Quindi: provo a escludere intorni di $+\infty$ e $-\infty$, cioè restringo f_n a intervalli compatti.

Fisso $a > 0$



$$\sup_{x \in [-a,a]} |f_n(x)| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DEFINITIVAMENTE}}}{=} |f_n(\pm a)|$$

$\Rightarrow \sum_n \sup_{[-a,a]} |f_n|$ e $\underbrace{\sum_n |f_n(\pm a)|}_{\text{converge}}$ hanno lo stesso carattere

(perché $a \in \mathbb{R}$ e $\sum_n$ conv. assol. in $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \sum_n \sup_{[-a,a]} |f_n|$ converge, cioè: $\sum_n f_n$ conv. totalm. (e quindi unif.) in $[-a,a]$

Resta da capire se in insiemi del tipo $]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$ c'è conv. uniforme.

Osservo che

$\sum_n f_n$ conv. unif. in $]a,+\infty[$ $\Leftrightarrow$

$\{S_n\}$ conv. unif. in $]a,+\infty[$ $\Leftrightarrow$ ($S_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$; $\mathbb{R}$ è completo)

$\{S_n\}$ soddisfa la CCU in $]a,+\infty[$ $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m \geq \nu$: $\sup_{x \in]a,+\infty[} |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$

Fisso $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_k(x) = \frac{x}{x^2+k^2}$$

Valuto

$$\sup_{x \in]a,+\infty[} |S_n(x) - S_{2n}(x)| \underset{\underset{n \geq a}{\uparrow}}{\geq} |S_n(n) - S_{2n}(n)|$$

$$= S_{2n}(n) - S_n(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+(2n)^2}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{5n} = n \cdot \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}$$

Dunque: $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{]a,+\infty[} |S_n - S_{2n}| \geq \frac{1}{5}$$

Dunque: $\{S_n\}$ <u>non</u> soddisfa la CCU in $]a,+\infty[$

quindi la serie $\sum_n f_n$ <u>non</u> conv. unif. in $]a,+\infty[$.