3 ottobre 2023

Dim. della Prop.

① Suppongo che $\{f_n\}$ converga unif. in X; chiamo f la funzione limite unif.

Fisso $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$. In corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{3}$, dato che $f_n \to f$ unif., esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \geq \nu : \quad \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (*)$$

Fisso $n, m \geq \nu$. Osservo che $\forall \bar{x} \in X$:

$$d_Y(f_n(\bar{x}), f_m(\bar{x})) \leq \underbrace{d_Y(f_n(\bar{x}), f(\bar{x}))}_{\leq \sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f(\bar{x}), f_m(\bar{x}))}_{\leq \sup_{x\in X} d_Y(f_m(x), f(x)) \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon$$

Quindi: $\sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$ $\square$

② Suppongo che $\{f_n\}$ soddisfi la C.C.U.,

cioè:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ : \quad \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \text{dfnt}$$

Quindi:

$$\forall x \in X : \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ : d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \text{dfnt}$$

cioè:

$\forall x \in X$: $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in (Y, d_Y),

sp. metrico completo. Quindi:

$\forall x \in X$: $\{f_n(x)\}$ converge in (Y, d_Y).

Definisco $f: X \to Y$ t.c. $\forall x \in X$: $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Devo dimostrare che $\{f_n\}$ converge a f non solo puntualmente ma anche uniformemente.

Fisso $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$; fisso $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$.

Dato che $\{f_n\}$ soddisfa la CCU, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall \, {n \atop m} \geq \nu : \quad \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon'$$

quindi:

$$\forall \, {n \atop m} \geq \nu \quad \forall x \in X : \quad d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon'.$$

Fisso $n \geq \nu$ e $x \in X$; osservo che

$$\forall m \geq \nu : \quad d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon' \qquad \odot$$

Cosa succede se $m \to +\infty$?

$$m \to +\infty \implies f_m(x) \to f(x)$$

$$\implies d_Y(\underbrace{f_n(x)}_{\text{fisso}}, f_m(x)) \longrightarrow d_Y(f_n(x), f(x))$$

$$\overset{\odot + \text{perm. disug.}}{\implies} \quad d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon' < \varepsilon$$

Le parti sottolineate esprimono in forma esplicita la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ a f. $\square$

Dim. che $(B(X,Y), d_\infty)$ è completo se (Y, d_Y) è completo.

Sia $\{f_n\} \subset B(X,Y)$ di Cauchy rispetto a d_∞:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+_+ : \quad \underbrace{d_\infty(f_n, f_m)}_{\text{def. di } d_\infty} < \varepsilon \quad \text{dfnt.}$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+_+ : \quad \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \text{dfnt}$$

cioè: $\{f_n\}$ soddisfa la CCU in X.

Dato che (Y, d_Y) è completo, per la Prop.-2 ottengo che esiste $f : X \to Y$ t.c. $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in X.

Devo verificare due cose:

(i) $f \in B(X,Y)$

(ii) $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Osservo che (i) è soddisfatta per la Prop. "conv. unif. e limitatezza", che posso applicare perché ciascuna f_n è limitata e $f_n \to f$ unif.

Per la (ii), osservo che per funzioni limitate

$$d_\infty(f_n, f) = \underbrace{\sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x))}_{\to 0}$$

perché $f_n \to f$ unif. in X.

$\square$

Dimostro il teor. di: PLSSI

Osservo che f è continua in $[a,b]$ perché limite uniforme di una successione di funzioni continue in $[a,b]$; quindi: f è R-integrabile.

$\forall n$:

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \overset{\text{linearità dell'int.}}{=} \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \overset{\text{dis. triang. per integr.}}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$\overset{\text{monotonia}}{\leq} \int_a^b \underbrace{\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|}_{\text{costante}}\,dx$$

$$= \underbrace{\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|}_{\substack{\downarrow\, n\to+\infty \\ 0}} (b-a)$$

perché $f_n \to f$ unif.

Per TCO: $\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \to 0$

cioè: $\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$ $\square$

Esempio (che mostra che senza conv. unif. il PLSSI non è garantito)

$f_n(x) = n^p x (1-x^2)^n \qquad x \in [0,1] \qquad (p \in \mathbb{R})$

$\forall n$: $f_n(0) = 0 \Rightarrow f_n(0) \to 0 =: f(0)$

$\forall n: \quad f_n(1) = 0 \quad \implies \quad f_n(1) \to 0 =: f(1)$

Fisso $x \in]0,1[$:

$$n^p \; x \; (1-x^2)^n$$

$p<0: \; n^p \to 0$

$p=0: \; n^p = 1$

$p>0: \; n^p \to +\infty$

cost.

$0<x<1 \implies 0<1-x^2<1$

$a^n, \quad 0<a<1$

$\searrow 0$

$p>0: \quad n^p a^n \qquad 0<a<1$

$\frac{n^p}{b^n} \to 0 \qquad b>1$ (gerarchia degli infiniti)

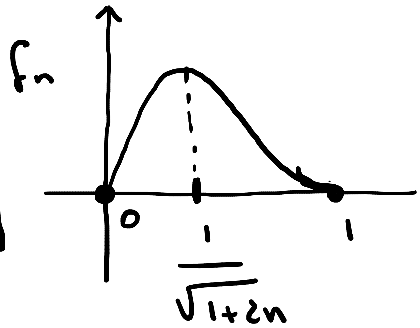
Dunque: $f_n(x) \to 0 =: f(x)$

In conclusione: $\{f_n\}$ conv. puntualm. in $[0,1]$ alla funzione f costante di valore 0.

$$\left(\implies \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right)$$

Studio la conv. uniforme:

$$\sup_{x\in[0,1]} |\underbrace{f_n(x)}_{\geq 0} - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = ?$$



$$f_n(x) = n^p x (1-x^2)^n$$

$$f_n'(x) = n^p \left[(1-x^2)^n + x\, n (1-x^2)^{n-1} (-2x) \right]$$

$$= \underbrace{n^p}_{>0} \underbrace{(1-x^2)^{n-1}}_{\geq 0} (\underbrace{1 - x^2 - 2n x^2}_{\geq 0}) \iff x^2 \leq \frac{1}{1+2n}$$

$$\iff \quad 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right)$$

$$= n^p \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

$$= n^p \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n$$

$$= n^p \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \frac{1}{\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\to \sqrt{e}}}$$

$$\sup_{[0,1]} |f_n - f| = \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} \sim \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}}$$

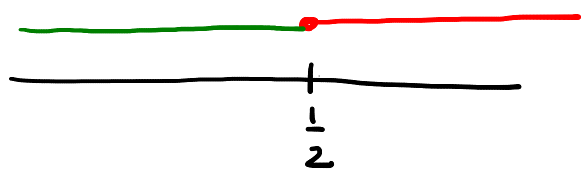
$$\sim \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n^p}{n^{1/2}} \longrightarrow \begin{cases} 0 \ \checkmark & p < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2e}} \ \times & p = \frac{1}{2} \\ +\infty \ \times & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$\{f_n\}$ conv. unif. a $f \equiv 0$

se e solo se $p < \frac{1}{2}$.

conv. unif

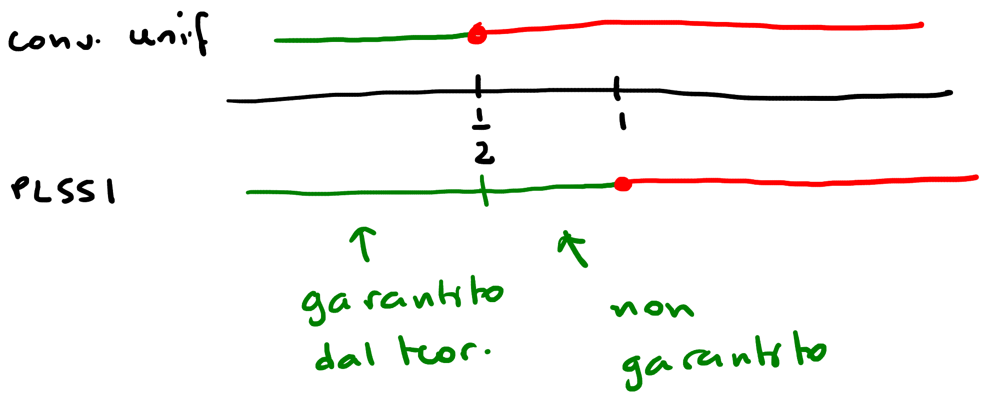


$\forall n$:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^p \int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = n^p\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 (-2x)(1-x^2)^n\,dx$$

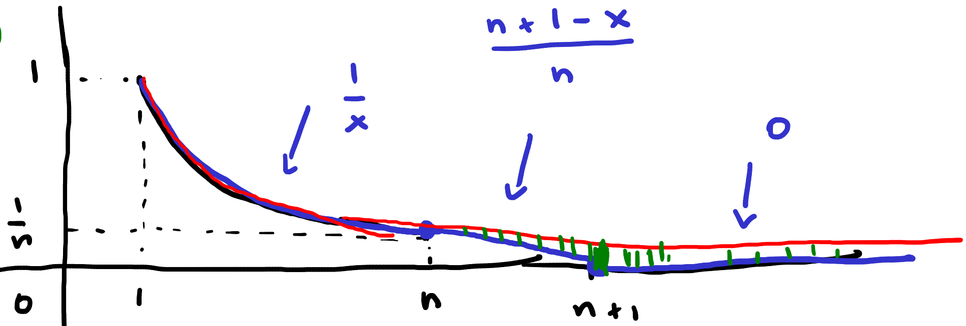
$$= n^p\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{n^p}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{n^p}{n+1} \longrightarrow \begin{cases} 0 \ \checkmark & p<1 \\ \frac{1}{2} \ \times & p=1 \\ +\infty \ \times & p>1 \end{cases}$$



Esempi: (sulla non estendibilità del TPLSSI per int. generalizzati su intervalli illimitati)

1



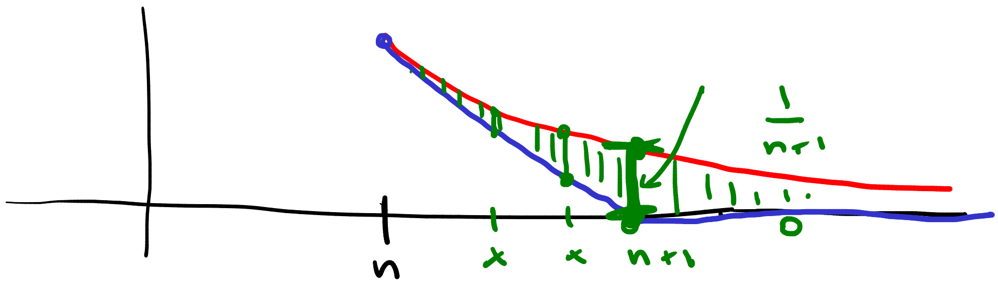
- $\forall n$: f_n è continua e integr. in senso general. in $[1,+\infty[$

- Fissato $x \geq 1$: def.te $n > x$ $\Rightarrow$ def.te $f_n(x) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$

  $$f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{x} =: f(x)$$

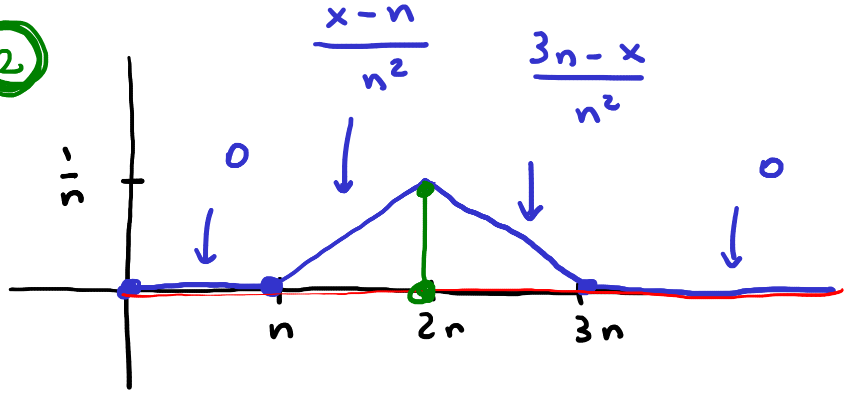
- $\{f_n\}$ conv. a f unif. in $[1,+\infty[$:

  $$\sup_{[1,+\infty[} |f_n - f| = \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$



Ma: $f(x) = \frac{1}{x}$ **non** è integr. in senso gen. in $[1, +\infty[$

2



- $\forall n$: f_n è cont e integr. in senso gen. in $[0, +\infty[$
- $\{f_n\}$ conv. punt. a $f(x) \equiv 0$ banalmente integr. in senso gen.
- La conv. è uniforme!

$$\sup_{[0,+\infty[} |f_n - f| = \frac{1}{n} \to 0$$

Ma:

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = (3n - n)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} = 1 \qquad \forall n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Applicazione del TPLSSI

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2} + n}{3n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

(per integrare: $[0, \pi]$)

$$\frac{e^{-nx^2} + n}{3n+1} \sim \frac{n}{3n+1} \sim \frac{n}{3n} \to \frac{1}{3}$$

$e^{-nx^2} \to \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, $\quad n \to +\infty$

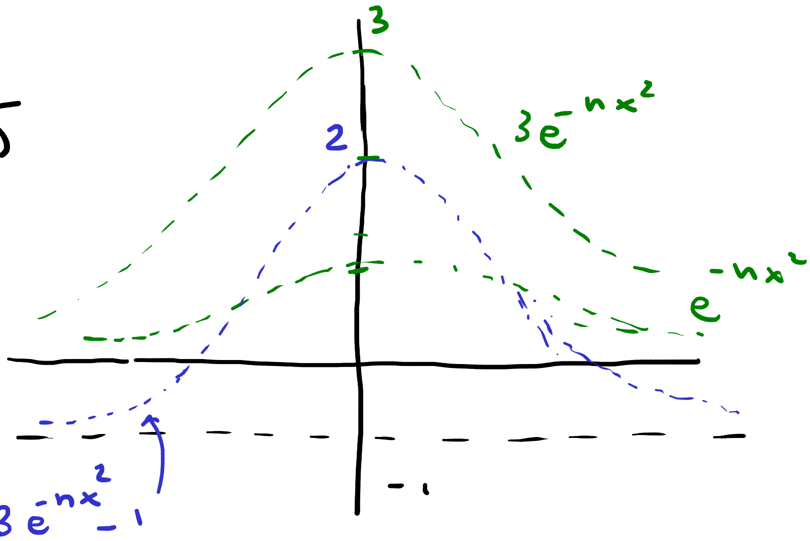
$$\Rightarrow f_n(x) \to f(x) =: \frac{1}{3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

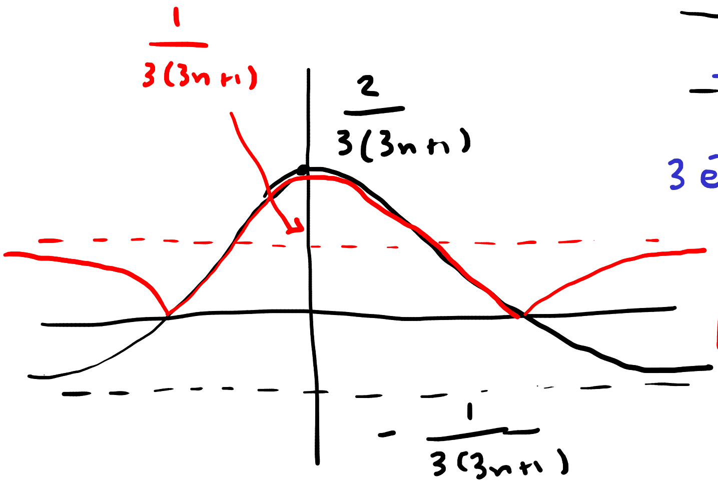
Per applicare TPLSSI, studio la conv. unif. (basterebbe in $[0,\pi]$, ma lo faccio in $\mathbb{R}$)

Fisso n:

$$f_n(x) - f(x) = \frac{e^{-nx^2} + n}{3n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3e^{-nx^2} + 3n - 3n - 1}{(3n+1)3}$$

$$= \frac{3e^{-nx^2} - 1}{3(3n+1)}$$





$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \frac{2}{3(3n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \{f_n\}$ conv. a f unif. in $\mathbb{R}$ (e quindi in $[0,\pi]$)

$$\overset{\text{TPLSSI}}{\Rightarrow} \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{= \frac{1}{3}}\,dx = \frac{\pi}{3} \qquad \square$$

Dimostro il TPLSSD

Fisso $x \in I$; esiste un intervallo compatto K contenuto in I che contiene x.

In K la succ. $\{f_n'\}$ conv. unif. e quindi puntualmente. In particolare:

esiste $\lim_{n \to +\infty} f_n'(x)$

Dunque: $\{f_n'\}$ converge puntualmente in I.

Definisco $g : I \to \mathbb{R}$ t.c. $g(x) = \lim_n f_n'(x) \quad \forall x \in I$.

Dico che g è continua in I. Infatti:

fisso $x \in I$; esiste $K \subset I$ interv. compatto che contiene x.

In K, $\{f_n'\}$ conv. unif. (a g, ovviamente);

ciascuna f_n' è continua in K.

Per la prop. "conv. unif. e continuità":

g è continua in K e in particolare in x. $\square$

Pongo $\ell := \lim_n f_n(x_0)$.

Fisso $x \in I$. Per ogni n:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_0),$$

FFCI, applicabile perché f_n' è continua

cioè:

$$f_n(x) = \underbrace{f_n(x_0)}_{\substack{\downarrow \\ \ell}} + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \xrightarrow{?} \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

$n \to +\infty$

? Intervallo di estremi x e x_0 è compatto contenuto in I $\Rightarrow$ su tale intervallo $\{f_n'\}$ conv. unif. a g

$\Rightarrow$ posso applicare TPLSSI

Definisco $f: I \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad \forall x \in I$$

Per le osservazioni fatte:

$$\forall x \in I: \quad f_n(x) \to f(x)$$

cioè: $\{f_n\}$ conv. a f puntualmente in I.

Osservo che la funzione

$$\circledast \qquad x \in I \longmapsto \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

è la funzione integrale di punto iniziale x_0 della funzione g, che è continua in I

Per TFCI: $\circledast$ è primitiva di g in I

$\Rightarrow$ f è primitiva di g in I (è la $\circledast$ + ℓ)

$\Rightarrow$ f è derivabile in I e $f' = \underbrace{g}_{\text{continua}}$

$\Rightarrow$ $f \in C^1(I, \mathbb{R})$.

Inoltre: $f' = g \iff$

$$\forall x \in I: \; f'(x) = g(x) = \lim_n f_n'(x)$$

Resta da provare che $\{f_n\}$ conv. a f uniformemente nei sottointervalli compatti di I.

Non è restrittivo considerare solo intervalli compatti che contengono x_0.

Fisso $a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $x_0 \in [a,b] \subseteq I$.

Fisso n.

Per ogni $x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \ell - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right|$$

$$= \left| f_n(x_0) - \ell + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right|$$

$$\leq |f_n(x_0) - \ell| + \underbrace{\left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right|}$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))\,dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f_n'(t) - g(t)|}_{\leq \sup_{[a,b]} |f_n' - g|} dt \right|$$

$$\leq \left| \sup_{[a,b]} |f_n' - g| \, (x - x_0) \right|$$

$$\leq \sup_{[a,b]} |f_n' - g| \, (b - a)$$

Ricapitolando:

$\forall x \in [a,b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_0) - \ell| + \sup_{[a,b]} |f_n' - g| \, (b-a)}_{\text{non dipende da } x}$$

Quindi: $\forall n$

$$0 \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| \le \overbrace{\underbrace{|f_n(x_0)-\ell|}_{\to 0} + \underbrace{\sup_{[a,b]}|f_n'-g|}_{\to 0}\,(b-a)}^{\to 0}$$

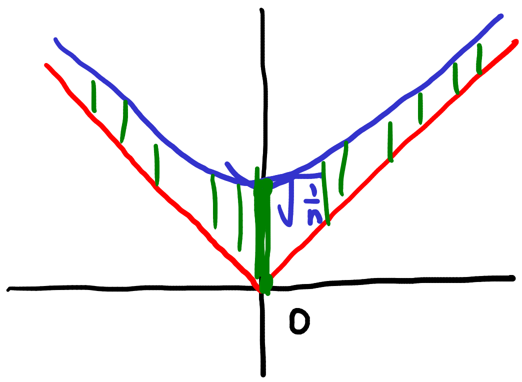
$f_n' \to g$ unif. in $[a,b]$

TCO $\Rightarrow$ $\lim_n \sup_{[a,b]} |f_n - f| = 0$

cioè: $\{f_n\}$ conv. a f unif. in $[a,b]$. $\square$

Es: $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ $\quad x\in\mathbb{R}$; $f_n \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\forall x$: $f_n(x) \to |x| =: f(x)$ Non deriv. in $x=0$



$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sqrt{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \{f_n\} \to f$ unif. in $\mathbb{R}$.