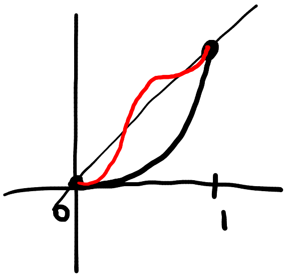
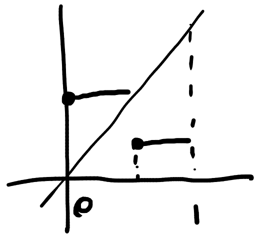
26 settembre 2023



$f(x) = x^2$

$[0,1]$



Dim. del teor. delle contrazioni

Per ipotesi: $f: X \to X$, (X,d) sp. m. completo

$\exists \alpha \in]0,1[$ t.c. $\forall x,y \in X$:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \qquad (*)$$

Tesi: $\exists! x \in X$ t.c. $f(x) = x$.

Dimostro anzitutto l'esistenza di un punto fisso.

Fisso $x_0 \in X$. Pongo $x_1 := f(x_0)$ e $\delta := d(x_0, x_1)$

Se $\delta = 0$: $d(x_0, x_1) = 0 \iff x_0 = x_1$

$\iff x_0 = f(x_0)$

$\Rightarrow x_0$ è punto fisso. $\square$

Se $\delta > 0$: definisco

$$x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

e ottengo la successione $\{x_n\} \subset X$.

Osservo che:

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \overset{(*)}{\leq} \alpha\, d(x_0, x_1) = \alpha\delta$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \overset{(*)}{\leq} \alpha\, d(x_1, x_2) \leq \alpha^2 \delta$$

$\vdots$

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k \delta \qquad \forall k \qquad (**)$$

Fisso n, m con $m > n$:

$$d(x_n, x_m) \overset{\text{dis.tr.}}{\leq} d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\overset{(**)}{\leq} \alpha^n \delta + \alpha^{n+1} \delta + \dots + \alpha^{m-1} \delta$$

$$= \alpha^n \delta \, (\underbrace{1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}})$$

somma parziale della serie geometrica di ragione $\alpha \in]0,1[\subset]-1,1[$

somma della serie geom.

$$\leq \alpha^n \delta \frac{1}{1-\alpha}$$

Quindi : $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$:

$$0 \leq d(x_n, x_m) \leq \underbrace{\alpha^n}_{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 0}} \frac{\delta}{1-\alpha} \quad \text{costante}$$

$(0 < \alpha < 1)$

$$\overset{\text{TCO}}{\Rightarrow} \lim_{n, m \to +\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

cioè: $\{x_n\}$ è succ. di Cauchy in (X, d), che per ipotesi è completo. Quindi: $\{x_n\}$ converge in (X, d) cioè esiste $x \in X$ t.c. $d(x_n, x) \to 0$.

Osservo che anche $\{x_{n-1}\}$ converge a x (in quanto estratta da $\{x_n\}$) e che

$$\forall n : \quad \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x_n} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cont.}}}{f}(\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x_{n-1}}) \longrightarrow f(x)$$

Per unicità del limite: $x = f(x)$, cioè:

x è punto fisso di f.

Dimostro l'unicità del punto fisso.
Suppongo che x', x'' siano punti fissi di f con $x' \neq x''$. Risulta:

$$d(x', x'') \underset{\substack{\uparrow \\ x', x'' \text{ punti fissi}}}{=} d(f(x'), f(x'')) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{\leq} \alpha \, d(x', x'')$$

$$x' \neq x'' \Rightarrow d(x', x'') > 0$$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{divido m.a m.}}}{\Rightarrow}$

$$1 \leq \alpha, \quad \text{assurdo!} \qquad \square$$

Dimostro la prop. su compattezza, chiusura e limitatezza.

① Suppongo A compatto; dimostro che è limitato.

Ragiono per assurdo.

Fisso $\tilde{x} \in X$; se A non è limitato, per ogni $r \in \mathbb{R}_+^*$ $\exists \, x \in A$ t.c. $d(x, \tilde{x}) > r$

In particolare: $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \, x_n \in A$ t.c. $\underbrace{d(x_n, \tilde{x}) > n}_{\odot}$.

Considero $\{x_n\} \subset A$. Per ipotesi, A è compatto, quindi: $\exists \, \{x_{k_n}\}$ convergente a un certo $x \in A$

Ricordo che $x \in X \mapsto d(x, \tilde{x})$ è continua, quindi:

$$x_{k_n} \to x \implies d(x_{k_n}, \tilde{x}) \to \underbrace{d(x, \tilde{x})}_{\in \mathbb{R}} \quad (*)$$

Ma, per $\odot$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n: \quad d(x_{k_n}, \tilde{x}) > k_n \\ \text{e} \quad k_n \to +\infty \end{array}\right\} \implies d(x_{k_n}, \tilde{x}) \to +\infty \quad (**)$$

si contraddicono! □

(2) Suppongo A compatto e provo che (A, d^A) è completo.

Fisso $\{x_n\} \subset A$ di Cauchy in (A, d^A)

$\{x_n\} \subset A$, A compatto $\implies$

$\{x_n\}$ ammette una estratta convergente in (A, d^A)

Per la 2ª prop. delle succ. di Cauchy:

$\{x_n\}$ converge in (A, d^A) □

(3) Suppongo (X, d) compatto e $A \subseteq X$ chiuso.

Dimostro che A è compatto

Prendo $\{x_n\} \subset A$; ovviamente $\{x_n\}$ è succ. di elem. di X, che è compatto, quindi

$\{x_n\}$ ha una estratta convergente in (X, d)

Però: A è chiuso per ipotesi, e quindi tale estratta converge anche in (A, d^A). □

Es. di insieme chiuso e limitato ma non compatto

$(C([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$

$$\bar{B}_1(0) = \{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid d_\infty(f,0) \leq 1 \}$$

funz. ident. nulla

$$\iff \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - 0| \leq 1$$

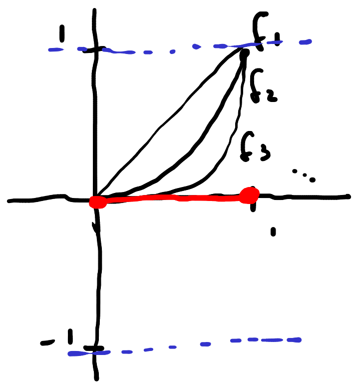
$$\iff \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1$$

Considero $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = x^n \quad x \in [0,1]$

Osservo che $\forall n$:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1$$

$$\Rightarrow f_n \in \bar{B}_1(0) \quad \forall n.$$



Quindi: $\{f_n\}$ è succ. di elem. della palla chiusa $\bar{B}_1(0)$ in $(C([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$.

Supponongo che $\{f_n\}$ ammetta una succ. estratta convergente in $(\bar{B}_1(0), d_\infty)$, cioè:

$$\exists f \in \bar{B}_1(0) \quad \exists \{f_{k_n}\} \quad t.c. \quad \underbrace{d_\infty(f_{k_n}, f) \to 0}_{\odot}$$

$$\odot \iff \sup_{x\in[0,1]} |f_{k_n}(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1]: \ |f_{k_n}(x) - f(x)| \to 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1]: \ f_{k_n}(x) \to f(x)$$

cioè: $\forall x \in [0,1]$ $\quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_{k_n}(x)$

Però:

Fissato $x \in [0,1]$, $\{f_{k_n}(x)\} \subset \mathbb{R}$ è

succ. estratta da $\{f_n(x)\}$ e

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Per unicità del limite:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

e quindi: $f \notin C([0,1], \mathbb{R})$

$$\Rightarrow f \notin \bar{B}_1(0) \qquad \square$$

Norme equivalenti in $\mathbb{R}^n$

$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ $\qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ $\qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \|x\|_1 \le n \|x\|_\infty \le n\|x\|$$
$$\le n \|x\|_1 \le \dots$$

$\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ norme su X

Si dicono equivalenti se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$ t.c.

$\forall x \in X$:

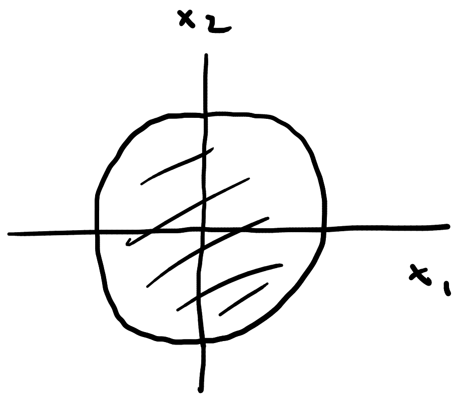
$$\alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1$$

Intorni sferici in $\mathbb{R}^2$

- $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$B_1(0) = \{ (x_1, x_2) \mid \|x - 0\| < 1 \}$

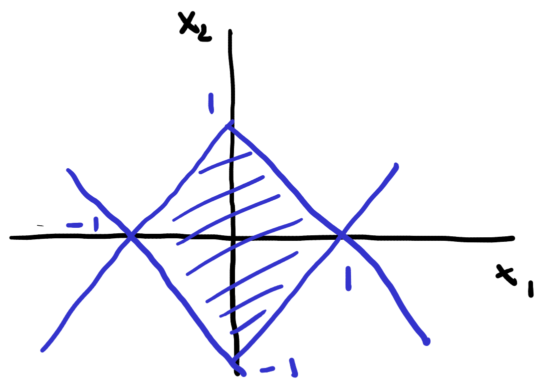
$= \{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$



- $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$

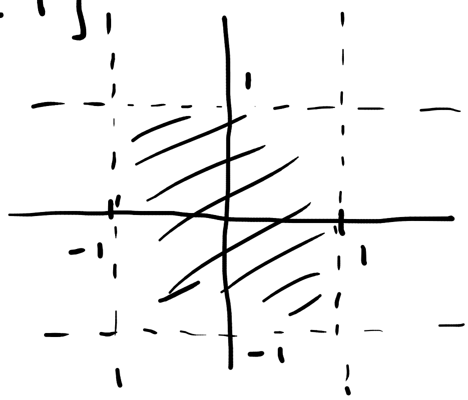
$B_1(0) = \{ (x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| < 1 \}$

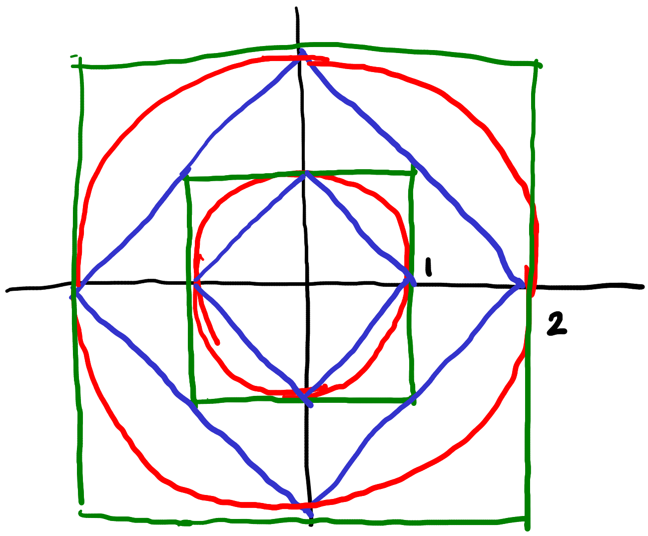
$|x_2| < 1 - |x_1|$



- $\|x\|_\infty = \max \{ |x_1|, |x_2| \}$

$B_1(0) = \{ (x_1, x_2) \mid |x_1| < 1 \text{ e } |x_2| < 1 \}$





$(Y, \|\cdot\|_Y)$ sp. normato

$B(X, Y)$ sott. vett. di $\mathcal{F}(X, Y)$

$f, g \in B(X, Y) \Rightarrow$

$$\exists\, \bar{y}_f \in Y, \quad \exists\, r_f \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in X: \ \|f(x) - \bar{y}_f\|_Y \le r_f$$

$$\exists\, \bar{y}_g \in Y \quad \exists\, r_g \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in X: \ \|g(x) - \bar{y}_g\|_Y \le r_g$$

$\Rightarrow \quad \forall x \in X:$

$$\|(f+g)(x) - \underbrace{(\bar{y}_f + \bar{y}_g)}_{\in Y}\|_Y = \|f(x) + g(x) - \bar{y}_f - \bar{y}_g\|_Y$$

$$\le \|f(x) - \bar{y}_f\|_Y + \|g(x) - \bar{y}_g\|_Y$$

$$\le r_f + r_g =: r \in \mathbb{R}_+^*$$

Analogamente per λf. $\square$

Oss.

$$\begin{tikzcd}
(Y, \|\cdot\|_Y) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & (Y, d_Y) \arrow[d, squiggly] \\
(B(X,Y), \|\cdot\|_\infty) & (B(X,Y), d_\infty)
\end{tikzcd}$$

$d_Y(y_1, y_2) :\overset{\odot}{=} \|y_1 - y_2\|_Y$

$$\|f\|_\infty :\overset{\odot\odot}{=} \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$$

$$(B(X,Y), \tilde{d}_\infty)$$

$$\tilde{d}_\infty(f,g) := \|f - g\|_\infty$$

$$\overset{\odot\odot}{=} \sup_{x \in X} \|(f-g)(x)\|_Y$$

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

$$\overset{\odot}{=} \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_Y$$

$$=$$

Quindi: $\tilde{d}_\infty = d_\infty$

$(X, \|\cdot\|)$ sp. di Banach.

$\{x_n\} \subset X$

Ipotesi: la serie di termine $\|x_n\|$ converge.

Tesi: la serie di termine x_n converge.

$y_n := \|x_n\|$

Crit. Cauchy -(b)

$\sum_n y_n$ converge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \nu \quad \forall k \geq 1$:

$$|y_{n+1} + \dots + y_{n+k}| < \varepsilon$$

Questo equivale a:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \nu, \; \forall k \geq 1$:

$$\|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+k}\| < \varepsilon \qquad \odot$$

Per la disug. triangolare:

$$\|x_{n+1} + \dots + x_{n+k}\| \leq \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+k}\| \qquad (\cdot\cdot)$$

$\odot + (\cdot\cdot) \Rightarrow$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \nu, \; \forall k \geq 1$:

$$\|x_{n+1} + \dots + x_{n+k}\| < \varepsilon$$

Quindi: $\{x_n\}$ soddisfa la (b) del crit. di Cauchy; dato che $(Y, \|\cdot\|_Y)$ è di Banach, questo implica che la serie di termine x_n è convergente. $\square$