21 settembre 2023

Dimostro la Prop.

① $x \in Dr(E) \iff \exists \{x_n\} \subset E \setminus \{x\}$ t.c. $x_n \to x$

$(\Rightarrow)$ $x \in Dr(E)$

$\overset{def}{\Rightarrow}$ $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$ $\exists y \in B_r(x) \cap E \setminus \{x\}$

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \setminus \{x\}$

Quindi: $\{x_n\} \subset E \setminus \{x\}$

$\forall n$: $0 \leq d(x_n, x) < \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow 0} \overset{TCO}{\Rightarrow} d(x_n, x) \to 0$

$\Rightarrow$ $\{x_n\}$ conv. a x in (X, d).

$(\Leftarrow)$ Ip: $\exists \{x_n\} \subset E \setminus \{x\}$ t.c. $x_n \to x$

Fisso $r \in \mathbb{R}_+^*$; per def. di limite

dfnt: $x_n \in B_r(x)$

$\Rightarrow$ dfnt: $x_n \in B_r(x) \cap E \setminus \{x\}$

$\Rightarrow$ $B_r(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset$

Quindi: $x \in Dr(E)$ □

② $x \in \overline{E} \iff \exists \{x_n\} \subset E$ t.c. $x_n \to x$

$(\Rightarrow)$ $x \in \overline{E} \Rightarrow x \in E$ opp. $x \in Dr(E)$

$\Downarrow$ scelgo $x_n = x$ $\forall n$ $\Rightarrow x_n \to x$

$\Downarrow$ ① $\exists \{x_n\} \subset E \setminus \{x\} \subset E$ t.c. $x_n \to x$

$(\Leftarrow)$ (già vista in AM II)

Ip: $\exists \{x_n\} \subset E$ t.c. $x_n \to x$

Th: $x \in \bar{E}$

Se $x \in E$: ok!

se $x \notin E$

$\forall r \in \mathbb{R}^*_+$: dfnt $x_n \in B_r(x)$

$\Rightarrow$ dfnt $x_n \in B_r(x) \cap E \setminus \{x\}$

$\Rightarrow B_r(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in D_r(E) \Rightarrow x \in \bar{E}$ $\square$

③ E è chiuso $\iff$

$\forall \{x_n\} \subset E$ t.c. $\{x_n\}$ conv. a x in (X, d)

risulta : $x \in E$

$(\Rightarrow)$ Prendo $\{x_n\} \subset E$ t.c $\{x_n\}$ conv. a x in (X,d)

$\overset{②}{\Rightarrow} x \in \bar{E}$, E chiuso $\Rightarrow x \in E$

$(\Leftarrow)$ Oss. E chiuso $\iff \bar{E} \subseteq E$

Prendo $x \in \bar{E}$ $\overset{②}{\Rightarrow} \exists \{x_n\} \subset E$ t.c. $x_n \to x$ in (X,d)

$\overset{\text{Ip.}}{\Rightarrow} x \in E$ $\square$

Dimostro che $C_b(X,Y)$ è sottoinsieme chiuso di $(B(X,Y), d_\infty)$.

Per la ③ della prop. precedente, mi basta dimostrare che:

$\forall \{f_n\} \subset C_b(X,Y)$ t.c. $\{f_n\}$ converge a una certa f in $(B(X,Y), d_\infty)$, risulta:

$f \in C_b(X,Y)$

Osservo che:

$\{f_n\}$ conv. a f in $(B(X,Y), d_\infty) \overset{def}{\iff}$

$$f \in B(X,Y) \quad e \quad d_\infty(f_n, f) \to 0$$

Quindi: provare che $f \in C_b(X,Y)$ equivale a provare $f \in C(X,Y)$.

Fisso $\bar{x} \in X$. Fisso $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Dato che $d_\infty(f_n,f) \to 0$, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{3}$ $\exists\, \nu \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \geq \nu: \quad d_\infty(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3};$$

quindi:

$$d_\infty(f_\nu, f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

che equivale a

$$\sup_{x \in X} d_Y(f_\nu(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

che implica

$$\forall x \in X : \quad d_Y(f_\nu(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dato che f_ν è continua, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{3}$ esiste $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ t.c.

$$\forall x \in X, \quad d_X(x, \bar{x}) < \delta : \quad d_Y(f_\nu(x), f_\nu(\bar{x})) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Prendo $x \in X$ t.c. $d_X(x, \bar{x}) < \delta$ e osservo che

$$d_Y(f(x), f(\bar{x})) \overset{\text{dis. tr.}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{d_Y(f(x), f_\nu(x))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_\nu(x), f_\nu(\bar{x}))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_\nu(\bar{x}), f(\bar{x}))}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Quindi: f è continua in $\bar{x}$. □

Dimostro la caratterizzazione sequenziale della continuità

$a \Rightarrow b$

Prendo $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ t.c. $x_n \to x$ (in (X, d_X))

Voglio mostrare che $f(x_n) \to f(x)$ (in (Y, d_Y))

Fisso $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; per la continuità di f in x esiste $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ t.c. $\forall y \in X$ con $d_X(y, x) < \delta$ risulta $d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon$.

Dato che $x_n \to x$, $d\!f\!n\!t$ ho $d_X(x_n, x) < \delta$

quindi, per $\bullet$: $d\!f\!n\!t$ ho $d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

Quindi: $f(x_n) \to f(x)$.

$(b \Rightarrow a)$

Per assurdo, suppongo che f non sia continua in x, cioè:

$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ t.c. $\forall\, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ $\exists\, y \in X$ con $d_X(y, x) < \delta$ t.c. $d_Y(f(y), f(x)) \geq \varepsilon$

Quindi: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\exists\, x_n \in X$ con $d_X(x_n, x) < \frac{1}{n}$ t.c. $d_Y(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$

Ho quindi $\{x_n\} \subset X$ t.c.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq d_X(x_n, x) < \frac{1}{n}$ $\quad(\cdot)$

$d_Y(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ $\quad(\cdot\cdot\cdot)$

Da $(\cdot)$ deduco che $d_X(x_n, x) \to 0$, cioè $\{x_n\}$ converge a x

Per ipotesi, $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$, cioè: $d_Y(f(x_n), f(x)) \to 0$ $\quad(\cdot\cdot)$

$(\cdot\cdot)$ e $(\cdot\cdot\cdot)$ si contraddicono! $\square$

Dimostro le propr. delle succ. di Cauchy

① Supp. $\{x_n\}$ di Cauchy in (X,d)
e mostro che è limitata.

Fisso $\varepsilon = 1$; dato che $\{x_n\}$ è di Cauchy,
esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall \, n, m \geq \nu$: $d(x_n, x_m) < 1$

In particolare: $\forall n \geq \nu$: $d(x_n, x_\nu) < 1$

Definisco

$$m := \max\{d(x_0, x_\nu), d(x_1, x_\nu), \dots, d(x_{\nu-1}, x_\nu)\}$$

e osservo che

$$d(x_n, x_\nu) \begin{cases} \leq m < m+1 & n \leq \nu - 1 \\ < 1 < m+1 & n \geq \nu \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $d(x_n, x_\nu) < m+1 =: r$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \in B_r(x_\nu)$

$\Rightarrow \{x_n\}$ è limitata. □

OSS: $\{x_{k_n}\}$ $\quad$ $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ strett. cresc.

$\forall n$: $k_n \geq n$

② Supp. $\{x_n\}$ di Cauchy e $\quad$ (in (X,d))
$\{x_{k_n}\}$ converge a x

Voglio provare che $\{x_n\}$ converge a x.

Fisso $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Dato che $\{x_n\}$ è di Cauchy, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{2}$ esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall \, {}^{n}_{m} \geq \nu_1 \; : \; d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dato che $\{x_{k_n}\}$ converge a x, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{2}$ esiste $\nu_2 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \geq \nu_2 \; : \; d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Prendo $\nu := \max\{\nu_1, \nu_2\}$ e osservo che:

$$\forall \, {}^{n}_{m} \geq \nu \; : \; d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\cdot)$$

$$\forall n \geq \nu : \; d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\cdot\cdot)$$

Prendo $n \geq \nu$ e osservo che:

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{k_n})}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ per } (\cdot) + k_n \geq n} + \underbrace{d(x_{k_n}, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ per } (\cdot\cdot)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Esempio di succ. di Cauchy che non converge.

$(\mathbb{R}, d_*)$ $\qquad d_* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$d_*(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

Verifico che d_* è una metrica.

(D1) $d_*(x,y) = 0 \iff |\arctan(x) - \arctan(y)| = 0$

$\iff \arctan(x) - \arctan(y) = 0$

$\iff \arctan(x) = \arctan(y)$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{arctan è iniettiva}}}{\iff} \quad x = y$ ✓

(D2) ovvia!

(D3) $d_*(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

$= |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)|$

$\leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)|$

$= d_*(x,z) + d_*(z,y)$ ✓

Considero $x_n = n \quad \forall n$.

$d_*(x_n, x_m) = |\arctan(x_n) - \arctan(x_m)|$

$= |\underbrace{\arctan(n)}_{\downarrow \, \pi/2} - \underbrace{\arctan(m)}_{\downarrow \, \pi/2}| \xrightarrow[n, m \to +\infty]{} 0$

Quindi: $\{x_n\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d_*)$

Dico che $\{x_n\}$ non è convergente in $(\mathbb{R}, d_*)$

Infatti: se esistesse $x \in \mathbb{R}$ t.c. $d_*(x_n, x) \to 0$ avrei

$d_*(x_n, x) = |\arctan(n) - \arctan(x)| \longrightarrow 0$

Ma:

$$|\underbrace{\arctan(n)}_{\to \frac{\pi}{2}} - \arctan(x)| \to \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right|$$

Per unicità del limite:

$$\left|\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right| = 0$$

cioè $\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, assurdo!

Dimostro che $\mathbb{R}$ con la metrica del valore assoluto è completo.

Prendo $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ di Cauchy.

Per la Prop-1: $\{x_n\}$ è limitata; per il teor. di Bolzano-Weierstrass:

$\{x_n\}$ ha una succ. estratta convergente.

Per Prop-2: $\{x_n\}$ converge. $\square$

Per estendere il risultato a $\mathbb{R}^n$, munito della distanza euclidea, mi basta ricordare che $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall i \in \{1, .., n\}$:

$$|x_i| \leq \|x\|$$

Se $\{x_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}^n$:

$$0 \leq |x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$: $\{x_{n,i}\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$: $\{x_{n,i}\}$ converge a $x_i \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{x_n\}$ converge a $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Dimostro la prop. "chiusura e completezza"

① Supp. (A, d^A) completo
Dimostro che A è chiuso in (X, d),

mostrando che contiene i limiti di tutte le succ. convergenti di suoi elementi.

Sia $\{x_n\} \subset A$ t.c. $x_n \to x$ in (X, d)

Voglio provare che $x \in A$.

Dato che $\{x_n\}$ converge in (X, d), posso dire che $\{x_n\}$ è di Cauchy in (X, d)

cioè
$$d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$
$$\parallel$$
$x_n, x_m \in A$
$$d^A(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$

cioè: $\{x_n\}$ è di Cauchy in (A, d^A).

Per ipotesi, (A, d^A) è completo, quindi esiste $y \in A$ t.c. $d^A(x_n, y) \to 0$

da cui: $d(x_n, y) \to 0$

Per unicità del limite: $y = x$

Dato che $y \in A$, ottengo $x \in A$. $\square$

② Suppongo (X, d) completo, $A \subset X$ chiuso e dimostro che (A, d^A) è completo.

Sia $\{x_n\}$ di Cauchy in (A, d^A), cioè:

$x_n \in A \quad \forall n$

$d^A(x_n, x_m) \underset{n,m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(x_n, x_m) \underset{n,m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \text{ è di Cauchy in } (X, d) \\ (X, d) \text{ è completo per ipotesi}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\{x_n\}$ converge a un certo x in (X, d)

Dato che A è chiuso: $x \in A$

e quindi: $\{x_n\}$ converge a x in (A, d^A)

$\square$