19 settembre 2023

Metrica euclidea

In $\mathbb{R}^n$ è definita la norma euclidea (Geometria)

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Ricordo le proprietà della norma: $\qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(N3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ricordo come è definita la metrica euclidea:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad d(x,y) := \|x - y\|$$

Verifico che d soddisfa le proprietà richieste.

Osservo che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad d(x,y) := \underbrace{\|x - y\|}_{\geq 0}$

per definizione

Prendo $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = 0 \overset{def}{\iff} \|x - y\| = 0 \overset{(N1)}{\iff} x - y = 0$$

$$\iff x = y \qquad \Rightarrow (D1) \text{ è sodd.}$$

$$d(x,y) \overset{def}{=} \|x - y\| = \|-(y - x)\| \overset{(N2)}{=} \underbrace{|-1|}_{=1} \, \|y - x\|$$

$$\overset{def}{=} d(y,x) \qquad \Rightarrow (D2) \text{ è sodd.}$$

Prendo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$d(x,y) \overset{def}{=} \|x-y\| = \|\underbrace{x-z} + \underbrace{z-y}\|$$

$$\overset{(N3)}{\leq} \|x-z\| + \|z-y\| \overset{def}{=} d(x,z) + d(z,y)$$

$\Rightarrow$ (D3) è sodd. $\square$

Metrica discreta

$$d_{DIS} : X \times X \to \mathbb{R}_+ \quad \text{t.c.} \quad d_{DIS}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(contiene almeno due elementi)

(D1) è vera per definizione

(D2) è ovvia

(D3)? Fisso x, y, z; devo provare che

$$d_{DIS}(x,y) \leq d_{DIS}(x,z) + d_{DIS}(z,y) \qquad (*)$$

1° caso: $x = y \Rightarrow d_{DIS}(x,y) = 0$

$d_{DIS}(x,z) \geq 0$, $d_{DIS}(z,y) \geq 0$ $\Rightarrow$ $(*)$ è sodd.

2° caso: $x \neq y \Rightarrow d_{DIS}(x,y) = 1$ $\odot$

z non può essere contemporaneamente uguale a x e a y $\Rightarrow$

almeno uno tra $d_{DIS}(x,z)$ e $d_{DIS}(z,y)$ è uguale a 1 $\Rightarrow$

$$d_{DIS}(x,z) + d_{DIS}(z,y) \geq 1 \qquad (:)$$

$(\cdot)+(:)$

$\Rightarrow$ $(*)$ è verificata $\square$

Intorni sferici in $\mathbb{R}$ con $d(x,y) := |x-y|$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$:

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < r\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\} = \,]x_0 - r, x_0 + r[$$

Intorni sferici in (X, d_{DIS})

$x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}_+^*$:

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid d_{DIS}(x, x_0) < r\} = \begin{cases} \{x_0\} & r \in \,]0,1] \\ X & r \in \,]1,+\infty[\end{cases}$$

Verifico la validità della prop. di separazione

$x, y \in X$ con $x \neq y$

$x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$

Scelgo $r := \dfrac{d(x,y)}{2}$; dico che $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

Per assurdo, suppongo che esista $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$

$\Rightarrow$ $d(z,x) < r$ e $d(z,y) < r$

Ma:

$$d(x,y) \overset{(D3)}{\leq} d(x,z) + d(z,y) \overset{+(D2)}{<} r + r = 2r = d(x,y) \;!! \quad \square$$

Frontiera in (X, d_{DIS})

$E \subset X$

$$x_0 \in \partial E \iff \forall r \in \mathbb{R}^*_+ : \quad B_r(x_0) \cap E \neq \emptyset \quad ① \quad \text{e} \quad B_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset \quad ②$$

Considero $B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$

$x_0 \in E \Rightarrow$ vale ① e non ②

$x_0 \notin E \Rightarrow$ vale ② e non ①

La contraddizione mostra che ∂E non può contenere alcun elemento, cioè $\partial E = \emptyset$.

Allora:

$\forall E \subset X$: $\quad E \cap \partial E = E \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow E$ è aperto

$\forall E \subset X$: $\quad \underset{\emptyset}{\overset{\shortparallel}{\partial E}} \subseteq E \Rightarrow E$ è chiuso.

Es: (X, d_{DIS}) con almeno due elementi $\quad x_0 \in X$

$$\partial B_1(x_0) = \emptyset \neq$$

$$S_1(x_0) = \{x \in X \mid d_{DIS}(x, x_0) = 1\} = X \setminus \{x_0\}$$

$(B(X,Y), d_\infty)$ è spazio metrico

$d_\infty : B(X,Y) \times B(X,Y) \to \mathbb{R}_+$ t.c.

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \quad \forall f,g \in B(X,Y).$$

$\forall x \in X$: $\quad d_Y(f(x), g(x)) \geq 0 \qquad (d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}_+)$

$x \in X \longmapsto d_Y(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \in [0, +\infty]$

Verifico che $\sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) < +\infty$
$(\in \mathbb{R})$

$f, g \in B(X,Y) \Rightarrow$

$\exists\, y_f, y_g \in Y \quad \exists\, r_f, r_g \in \mathbb{R}_+^*$ t.c.

$\forall x \in X$: $\quad d_Y(f(x), y_f) \leq r_f$

$\qquad d_Y(g(x), y_g) \leq r_g$

$\forall x \in X$:

$$d_Y(f(x), g(x)) \overset{\text{dis. tr.}}{\leq} \underbrace{d_Y(f(x), y_f)}_{\leq r_f} + d_Y(y_f, y_g) + \underbrace{d_Y(y_g, g(x))}_{\leq r_g}$$

$$\leq r_f + d_Y(y_f, y_g) + r_g =: M$$

Quindi:

$\forall x \in X$: $\quad d_Y(f(x), g(x)) \leq M$

cioè: $\underset{\in X}{x} \mapsto \underset{\in \mathbb{R}}{d_Y(f(x), g(x))}$ è limitata

$$\Rightarrow \sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x)) \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Verifico (D1), (D2), (D3).

Prendo $f,g \in B(X,Y)$

$$d_\infty(f,g) = 0 \overset{def}{\iff} \sup_{x\in X} \underbrace{d_Y(f(x),g(x))}_{\geq 0} = 0$$

$$\iff \forall x\in X : \ d_Y(f(x),g(x)) = 0$$

d_Y soddisfa (D1)

$$\iff \forall x\in X : \ f(x) = g(x)$$

$$\iff f = g .$$ (D1) è soddisfatta .

Dato che d_Y soddisfa (D2):

$$\forall x\in X : \quad d_Y(f(x),g(x)) = d_Y(g(x),f(x))$$

Passando al sup:

$$\sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x)) = \sup_{x\in X} d_Y(g(x),f(x))$$

cioè: $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$ (D2) ok!

Prendo $f,g,h \in B(X,Y)$.

$\forall x\in X$: d_Y sodd. (D3)

$$d_Y(f(x),g(x)) \leq d_Y(f(x),h(x)) + d_Y(h(x),g(x))$$

$$\leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g) \quad (\in \mathbb{R})$$

Passo al sup:

$$\sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x)) \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$$

cioè: $d_\infty(f,g) \le d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$

(D3) ok! $\square$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (su $\mathbb{R}$: $d(x,y) := |x-y|$

$r \in \mathbb{R}_+^*$

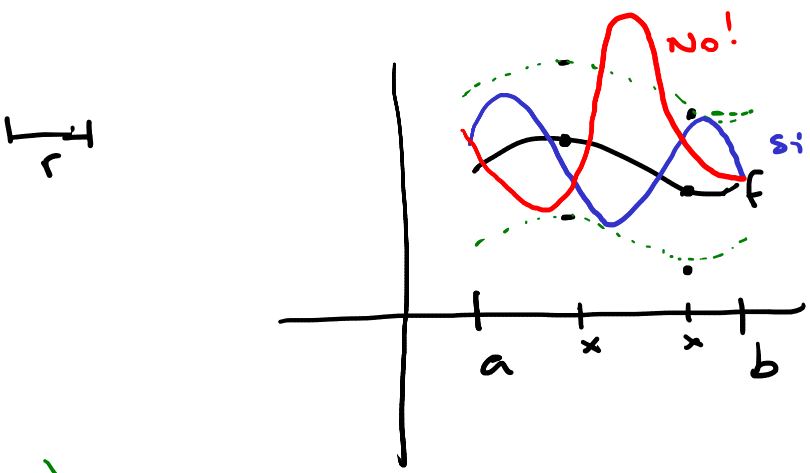
$\bar{B}_r(f) = \{ g \in B([a,b],\mathbb{R}) \mid d_\infty(g,f) \le r \}$

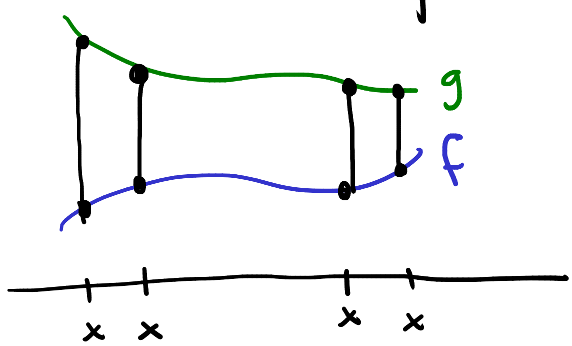
in $(B([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$

$= \{ g : [a,b] \to \mathbb{R} \mid g$ è limitata e $\underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| \le r}_{\otimes} \}$

$\otimes \iff \forall x \in [a,b] : |g(x) - f(x)| \le r$

$\iff \forall x \in [a,b]: f(x) - r \le g(x) \le f(x) + r$





(X, d_X) $\quad \tilde{x} \in X$

$f := x \in X \mapsto d_X(x, \tilde{x})$

Fisso $\bar{x} \in X$ e mostro che f è continua in $\bar{x}$.

Ricordo la 2ª dis. triangolare:

$\forall x \in X$:

$$| d_X(x, \tilde{x}) - d_X(\bar{x}, \tilde{x}) | \le d_X(x, \bar{x})$$

$$\iff | f(x) - f(\bar{x}) | \le d_X(x, \bar{x})$$

$$\iff d_{eucl.}(f(x), f(\bar{x})) \le d_X(x, \bar{x}) \qquad (*)$$

Fisso $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, prendo $\delta = \varepsilon$;

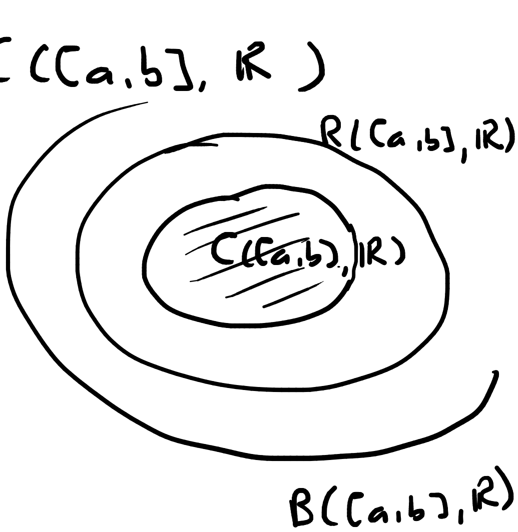
se $d_X(x, \bar{x}) < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$$d_{eucl.}(f(x), f(\bar{x})) \le d_X(x, \bar{x}) < \delta = \varepsilon \qquad \square$$

|| Metrica alternativa a d_∞ in $(C([a,b], \mathbb{R})$

$f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$:

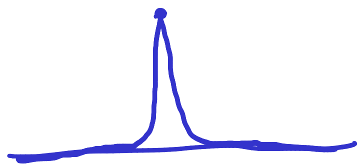
$$d_p(f, g) := \underbrace{\left(\int_a^b | f(x) - g(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}}_{\in \mathbb{R}_+}$$



$$d_1(f,g)=0 \iff \int_a^b \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\substack{\geq 0 \\ \text{continua}}}\,dx = 0$$

$$\overset{??}{\iff} |f(x)-g(x)| = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\iff f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b] \iff f = g \quad ✓$$



. . . (per esercizio)