① $f_n(x) = n^2 \arctan\left(\frac{nx}{n^3+x^2}\right) \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$

$\forall n: f_n(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$

Per $x \neq 0$: $\frac{nx}{n^3+x^2} \to 0 \Rightarrow$

$\arctan\left(\frac{nx}{n^3+x^2}\right) \sim \frac{nx}{n^3+x^2} \Rightarrow$

$f_n(x) \sim n^2 \cdot \frac{nx}{n^3+x^2} \Rightarrow$

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 x}{n^3+x^2} = x$

Quindi:

(f_n) converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Per rappresentare graficamente f_n, osservo che f_n è dispari e

- $f_n(0) = 0$, $f(x) > 0 \iff x > 0$
- $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} n^2 \arctan\left(\underbrace{\frac{nx}{n^3+x^2}}_{\to 0}\right) = 0$
- $f_n'(x) = n^2 \frac{1}{1+\left(\frac{nx}{n^3+x^2}\right)^2} \cdot n \, \frac{n^3+x^2 - x\cdot 2x}{(n^3+x^2)^2}$

$$= \frac{n^3}{1+\left(\frac{nx}{n^3+x^2}\right)^2} \cdot \frac{n^3-x^2}{(n^3+x^2)^2},$$

quindi:

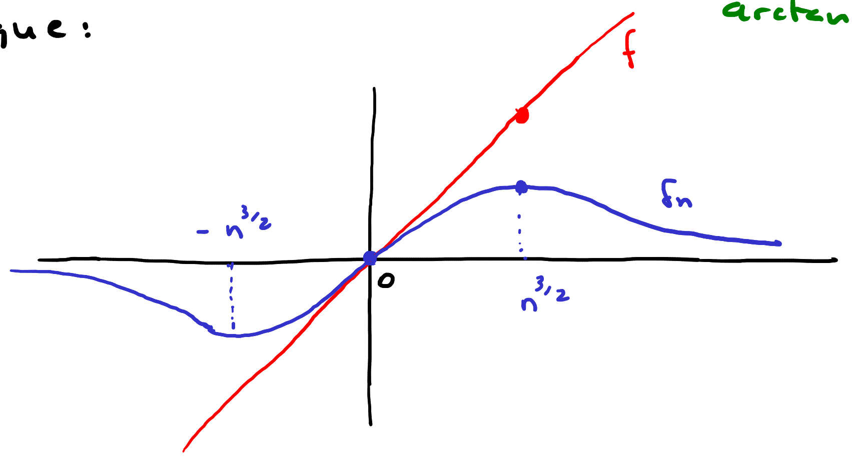
$$f_n'(x) \geq 0 \iff n^3 - x^2 \geq 0 \iff |x| \leq n^{3/2}$$

Noto anche che $f_n'(0) = 1$ e che

$$f_n(n^{3/2}) = n^2 \arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) < n^2 \frac{1}{2\sqrt{n}} < n^{3/2}$$

$\arctan(t) < t$ per $t > 0$

Dunque:

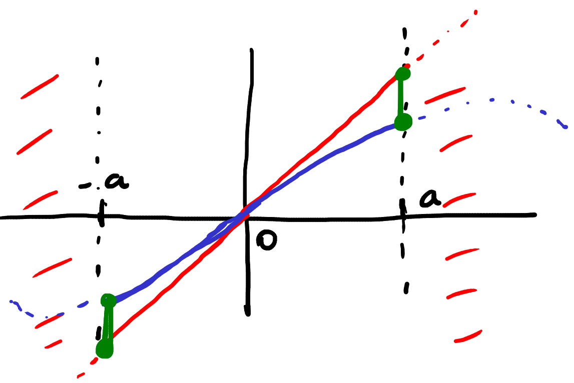


Dai grafici deduco immediatamente che:

- $\forall n$: $\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \lim_{x \to \pm\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$

  dunque (f_n) <u>non</u> converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$

- Fissato $a > 0$;



definitivamente $n^{3/2} > a \Rightarrow$

definitivamente $\sup_{[-a,a]} |f_n - f| = |f_n(\pm a) - f(\pm a)|$

perciò: $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[-a,a]} |f_n - f| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(\pm a) - f(\pm a)| = 0.$

Dunque: (f_n) converge a f uniformemente in $[-a,a]$ $\square$

② Studio della serie di termine

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n + 1}{n+3} e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Con la sostituzione $t = e^{-x}$, la serie di termine f_n è riconducibile alla serie di potenze

$$(\circ) \sum_n \frac{(-1)^n + 1}{n+3} t^n, \quad \text{con coefficienti} \quad c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{2}{n+3} & n \text{ pari} \end{cases}$$

Calcolo

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \text{ pari}}} \sqrt[n]{\frac{2}{n+3}} = 1$$

dunque il raggio di convergenza è $R = 1$

Per $t = \pm 1$ la serie $(\circ)$ diventa

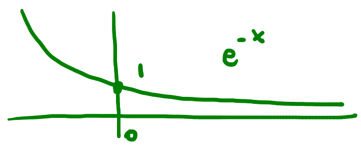
$$\sum_n \frac{(-1)^n + 1}{n+3} = \underbrace{\sum_n (-1)^n \frac{1}{n+3}}_{\substack{\text{convergente} \\ \text{(Leibniz)}}} + \underbrace{\sum_n \frac{1}{n+3}}_{\substack{\text{divergente} \\ \text{(armonica)}}}$$

e diverge.

Pertanto, la serie $(\circ)$ converge

- puntualmente e assolutamente in $(-1,1)$
- uniformemente e totalmente in $[-p,p]$ per ogni $p \in (0,1)$

Con $t = e^{-x}$, deduco che la serie assegnata converge



- puntualmente e assolutamente in $(0,+\infty)$
- uniformemente e totalmente in $[a,+\infty)$ per ogni $a > 0$.

□

③ Per ogni $x \in [0,2]$:

$$f(x) = x^2 - 2x \qquad g(x) = 3x^2 - 6x \qquad h(x) = x^2 - x$$

$$= 3(x^2 - 2x)$$

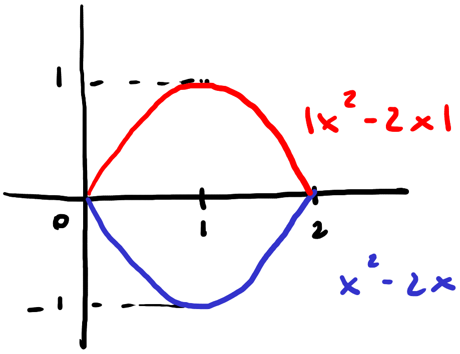
$$= 3f(x)$$

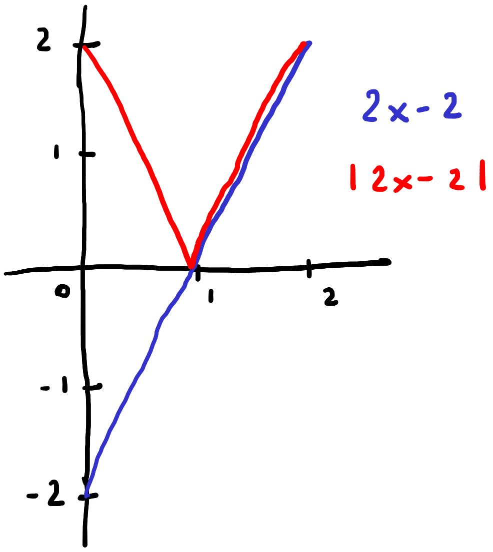
$$\|f - g\|_{C^1} = \|f - 3f\|_{C^1} = 2\|f\|_{C^1}$$

$$= 2\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$$

$$= 2\left(\sup_{x\in[0,2]} |x^2 - 2x| + \sup_{x\in[0,2]} |2x - 2|\right)$$

$$= 2(1 + 2) = 6$$





$$\|f - h\|_{C^1} = \|f - h\|_\infty + \|(f-h)'\|_\infty$$

$$= \sup_{x\in[0,2]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in[0,2]} |f'(x) - h'(x)|$$

$$= \sup_{x\in[0,2]} |-x| + \sup_{x\in[0,2]} |-1|$$

$$= 2 + 1 = 3$$

Quindi: h è più vicina a f rispetto a $\|\cdot\|_{C^1}$