Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica III**

5 novembre 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni di termine

$$f_n(x) = n^2 \arctan\left(\frac{n\,x}{n^3 + x^2}\right)$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n + 1}{n+3}\, e^{-n\,x}$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

3. Siano f, g, h le funzioni reali definite ponendo, rispettivamente,

$$f(x) = x^2 - 2\,x\,, \qquad g(x) = 3\,x^2 - 6\,x\,, \qquad h(x) = x^2 - x$$

per ogni $x \in [0, 2]$.

Si stabilisca quale tra g e h ha distanza minore da f rispetto alla metrica lagrangiana di ordine 1.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica III**

20 dicembre 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si consideri l'equazione differenziale $y' = 6\,t\,(y - 3\,y^{4/3})$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

   (e) Si determinino le soluzioni dei problemi di Cauchy di rispettive condizioni iniziali $y(0) = \dfrac{1}{50}$ e $y(0) = 1$.

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 1}{\sqrt{t}\,(y^4 + 1)} \\ y(1) = \alpha \qquad\qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

   Non si richiede di *risolvere* il problema di Cauchy, ma di rispondere alle seguenti domande motivando le risposte in base alla teoria e a opportune considerazioni qualitative.

   (a) È possibile determinare *a priori* l'intervallo di definizione della soluzione, al variare di α in $\mathbb{R}$?

   (b) (Facoltativo) È possibile prevedere il comportamento della soluzione agli estremi dell'intervallo di esistenza?

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Recupero seconda prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica III**

9 gennaio 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{t\,(y^2 - y)}{t^2+1}$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

   (e) Si determinino le soluzioni dei problemi di Cauchy di rispettive condizioni iniziali $y(1) = \dfrac{1}{3}$ e $y(1) = -3$.

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arcsin(t)\,(e^y - 1)\,(2-y) \\ \\ y(0) = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

   Non si richiede di *risolvere* il problema di Cauchy, ma di rispondere alle seguenti domande motivando le risposte in base alla teoria e a opportune considerazioni qualitative.

   (a) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è possibile determinare *a priori* l'intervallo di definizione della soluzione.

   (b) (Facoltativo) È possibile prevedere il comportamento della soluzione agli estremi dell'intervallo di esistenza?

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 9 gennaio 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni di termine

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{e^{nx}}{n+2}\right)$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = (-1)^n \arctan\left(\frac{e^{nx}}{n+2}\right)$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

(Si tenga presente quanto stabilito nella risoluzione del quesito 1.)

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{t\,(y^2 - y)}{t^2 + 1}$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 23 gennaio 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni di termine

$$f_n(x) = \begin{cases} n\,|x| & \text{se } x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{n\,x}{e^{n\,x} + 1}$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = y + (t-1)\,y^3$.

(a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

(b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

(c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

(d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 6 febbraio 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{n^2 + 2\,x^3}{n^2 + 1}\,\arctan\left(e^{n\,(2\,x-1)}\right) \qquad\qquad x \in [0, +\infty)\,.$$

   Si utilizzi il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, giustificandone la applicabilità, per calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^3 f_n(x)\,dx\,.$

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{(3\,\ln(x) + 1)^n}{n\,2^n + 1}$$

   con $x \in (0, +\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = t^3\sqrt{4 - y^2}\,.$

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

   (e) Si risolvano i problemi di Cauchy di rispettive condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y(2) = 0\,.$