Corso di Laurea Triennale in Fisica

Esame di **Analisi Matematica III**

a.a. 2024/2025 – programma dettagliato

prof.ssa Monica Lazzo

Spazi metrici

Metriche in un insieme. Spazi metrici. Sottospazi metrici. Intorni. Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione. Interiore, frontiera, derivato, chiusura. Insiemi aperti, insiemi chiusi. Insiemi limitati, funzioni limitate; funzioni continue.
Successioni convergenti. Unicità del limite. Convergenza in sottospazi metrici. Successioni di Cauchy; proprietà*. Spazi metrici completi. Completezza degli spazi metrici euclidei* e degli spazi funzionali B(X,Y) e C_b(X,Y) con la metrica dell'estremo superiore*. Teorema delle contrazioni*. Spazi metrici sequenzialmente compatti. Legame tra compattezza, completezza, chiusura e limitatezza*.
Spazi normati; spazi di Banach. Spazi normati di funzioni.

Successioni e serie di funzioni

Convergenza puntuale e uniforme di successioni di funzioni reali di una variabile reale. Convergenza uniforme, limitatezza e continuità. Passaggio al limite sotto il segno di integrale*. Passaggio al limite sotto il segno di derivata*. Norma lagrangiana in spazi di funzioni derivabili.
Serie di funzioni: convergenza puntuale, uniforme, assoluta e totale. Legame tra convergenza totale e convergenza uniforme*; implicazioni tra i modi di convergenza. Proprietà generali della somma di una serie di funzioni: limitatezza, continuità, integrazione e derivazione termine a termine.

Serie di potenze

Preliminari: massimo e minimo limite di una successione; criterio della radice* e del rapporto.
Serie di potenze. Lemma fondamentale*. Raggio di convergenza. Struttura dell'insieme di convergenza*. Teorema di Abel. Proprietà generali della somma di una serie di potenze. Relazione tra coefficienti di una serie di potenze e derivate della somma della serie. Principio di identità delle serie di potenze.
Serie di Taylor. Funzioni sviluppabili in serie di Taylor. Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor*. Sviluppabilità in serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Applicazioni delle serie di Taylor: valutazione approssimata di funzioni trascendenti, integrazione approssimata; soluzioni in serie di potenze di equazioni differenziali lineari.

Serie trigonometriche

Polinomi trigonometrici. Serie trigonometriche. Condizione sufficiente per la convergenza totale. Formule di ortogonalità. Coefficienti di Fourier; polinomi e serie di Fourier. Proprietà dei polinomi di Fourier rispetto alla distanza quadratica; disuguaglianza di Bessel; teorema di Riemann-Lebesgue.
Funzioni continue a tratti, monotone a tratti, regolari a tratti; funzione regolarizzata. Condizioni sufficienti per la convergenza puntuale e per la convergenza uniforme* delle serie di Fourier. Integrazione termine a termine per le serie di Fourier.
Utilizzo delle serie di Fourier per il calcolo della somma di alcune serie numeriche.

Equazioni differenziali

Equazioni differenziali ordinarie in forma generale e in forma normale. Soluzione di una equazione differenziale. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali vettoriali di ordine 1; equivalenza con equazioni differenziali scalari di ordine superiore. Regolarità delle soluzioni.

Funzioni lipschitziane e funzioni localmente lipschitziane; condizioni sufficienti per la locale lipschitzianità*.

Teorema di esistenza e unicità locale* e suoi corollari. Cenni sulla dipendenza continua dai dati.

Soluzioni prolungabili; prolungamenti. Condizioni sufficienti per la prolungabilità. Soluzioni massimali. Esistenza e unicità del prolungamento massimale. Comportamento delle soluzioni massimali agli estremi finiti dell'intervallo di esistenza. Funzioni sublineari; condizioni sufficienti per la sublinearità. Teorema di esistenza e unicità globale*.

Risultati teorici per equazioni differenziali scalari di ordine superiore; applicazione a equazioni differenziali lineari.

Risoluzione di alcune classi di equazioni del primo ordine: a variabili separabili, di Manfredi, di Bernoulli. Studio qualitativo delle soluzioni di alcune equazioni differenziali del primo ordine.

Note

Gli argomenti sono raggruppati per attinenza; l'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.

La dimostrazione dei risultati contrassegnati con l'asterisco* è parte integrante del programma.

Testi consigliati

G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica Volume 2, Zanichelli

V. Barutello, M. Conti, D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Vol. 2, Apogeo

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Lezioni di analisi matematica due, Zanichelli

E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri

C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 2, Zanichelli

W. Rudin, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill