a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica III

Successioni e serie di funzioni

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online; non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Considerazione introduttiva

Siano X un insieme e (Y, d_Y) uno spazio metrico.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : X \to Y$. Sia $f : X \to Y$.
Dire che (f_n) converge a f nello spazio $(B(X, Y), d_\infty)$ significa dire che:

1. per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione f_n è limitata;
2. la funzione f è limitata;
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$.

Esplicitiamo 3: $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0 \qquad (*)$

Notiamo che $(*)$ ha senso, e può essere soddisfatta, anche se le funzioni f_n e f non sono limitate. Esempio . . .

Questa considerazione ci conduce alle definizioni che seguono, nelle quali consideriamo soltanto funzioni reali (quindi $Y = \mathbb{R}$ e d_Y è la metrica associata al valore assoluto); per semplicità consideriamo anche $X \subseteq \mathbb{R}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

Diciamo che la successione (f_n) converge uniformemente a f in X se

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Diciamo che la successione (f_n) converge puntualmente a f in X se

$$\text{per ogni } x \in X: \quad \lim_{n \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

La funzione f che compare nelle due precedenti definizioni si chiama, rispettivamente, funzione limite uniforme e funzione limite puntuale della successione (f_n).

Osservazione

Se (f_n) converge uniformemente a f in X, allora converge puntualmente; il viceversa non è vero. $\to$ pagina seguente

Esempi $\leftarrow$ successioni che convergono puntalmente e non uniformemente

- $f_n(x) = x^n \qquad x \in [0,1]$

- $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{e^{nx}+1} \qquad x \in \mathbb{R}$

- $f_n(x) = n\,x\,e^{-n\,x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$

- $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n\,(\cos(x)+1)}{n+1} & x \in [(2n-1)\pi,\ (2n+1)\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

- $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty, 0] \\ n & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ \dfrac{1}{x} & x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right) \end{cases}$

Esplicitiamo le nozioni di convergenza puntuale e uniforme "con ε e ν":

- la successione (f_n) converge puntualmente a f in X se e solo se

  $\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \nu : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$;

  $\uparrow$ dipende da x e da ε

- la successione (f_n) converge uniformemente a f in X se e solo se

  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \nu : \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in X$.

  $\uparrow$ dipende solo da ε

Esempio

Esplicitare la convergenza "con ε e ν" per la successione (x^n), $x \in [0, 1]$.

Dedurre che (x^n) converge uniformemente in $[0, a]$, per ogni $a \in (0, 1)$.

Osservazione (convergenza uniforme e unione insiemistica)

Supponiamo che (f_n) converga uniformemente a f negli insiemi $X_1, \dots X_k$.

Fissiamo $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$.

Per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$ esiste $\nu_j \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_j$ risulta

$$(D_j) \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in X_j.$$

Posto $\nu := \max\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$, per ogni $n \geq \nu$ ciascuna (D_j) è soddisfatta e quindi

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in \bigcup_{j=1}^{k} X_j.$$

Pertanto: (f_n) converge unifomemente a f nell'unione $X_1 \cup \dots \cup X_k$.

Questa proprietà **non** vale per unioni infinite.

Per esempio: (x^n) converge uniformemente in $\left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$ per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, ma non converge uniformemente in

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right] = [0, 1).$$

Convergenza uniforme, limitatezza e continuità

Riesaminando la dimostrazione del teorema sulla completezza degli spazi delle funzioni limitate e delle funzioni limitate e continue si deducono le seguenti proprietà:

- la funzione limite uniforme di una successione di funzioni limitate è una funzione limitata;
- la funzione limite uniforme di una successione di funzioni continue (in un punto o in un insieme) è una funzione continua (in quel punto o in quell'insieme).

Osservazione

Se una successione di funzioni limitate/continue converge puntualmente ma non uniformemente, non è detto che la funzione limite sia limitata/continua.

$\uparrow$ non è precluso ma non è garantito

Esempi . . .

Conseguenza pratica

- Se una successione di funzioni limitate converge puntualmente a una funzione non limitata, si può escludere che la convergenza sia uniforme.
- Se una successione di funzioni continue in un punto converge puntualmente a una funzione non continua in quel punto, si può escludere che la convergenza sia uniforme in un intorno del punto.

Riprendere gli esempi, “recuperando” dove possibile la convergenza uniforme . . .

Passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata

Teorema (passaggio al limite sotto il segno di integrale)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che (f_n) converga uniformemente in $[a, b]$.

Allora, denotata con f la funzione limite uniforme di (f_n), si ha:

$$(*) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione . . .

Nota

Nelle ipotesi del teorema precedente, le funzioni f_n e f sono integrabili secondo Riemann in quanto continue in un intervallo compatto.

Assumendo che le f_n siano solo integrabili secondo Riemann, si dimostra che anche f è integrabile secondo Riemann e soddisfa $(*)$.

Osservazioni

- Se la successione (f_n) non converge uniformemente, non è detto che valga l'uguaglianza in $(*)$.

  Esempio: $f_n(x) = n^p\, x\,(1 - x^2)^n,\ x \in [0,1]$

- Il TPLSSI si estende a successioni di funzioni integrabili in senso generalizzato su intervalli limitati ma non su intervalli illimitati.

  Esempio . . .

Esempio

Utilizzare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-n\,x^2} + n}{3\,n + 1}\, dx.$$

Teorema (passaggio al limite sotto il segno di derivata)

Sia $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n \in C^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

Supponiamo che:

(i) esista $x_0 \in \mathrm{I}$ tale che $(f_n(x_0))$ converge;

(ii) la successione (f_n') converga uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in I.

Allora:

- esiste $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tale che (f_n) converge a f puntualmente in I e uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in I;
- f è di classe C^1 in I e si ha

$$(**) \qquad f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathrm{I}.$$

Dimostrazione ...

Supponendo solo f_n derivabile in I, con dimostrazione più articolata si ottengono le stesse conclusioni, con la ovvia differenza che f risulta solo derivabile.

Osservazioni

- A differenza che nel TPLSSI, supporre che la successione (f_n) converga uniformemente non garantisce che la funzione limite sia derivabile, né che valga l'uguaglianza in $(**)$.

  Esempi: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $\qquad f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n\,x^2}$

  limite non derivabile $\qquad$ limite derivabile ma non vale $(**)$

- Se I è illimitato, anche supponendo che (f_n') converga uniformemente in tutto I, non si può garantire che (f_n) faccia altrettanto.

  Esempio:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, n] \\ 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{n}\right) & x \in (n, 2n) \\ 2 & x \in [2n, +\infty) \end{cases}$$

Ulteriori spazi di funzioni

Ricordiamo che $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.
Consideriamo l'insieme

$$C^1([a,b],\mathbb{R}) := \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,\Big|\, f \text{ è derivabile con derivata continua} \Big\}.$$

- $C^1([a,b],\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $C([a,b],\mathbb{R})$.
- $C^1([a,b],\mathbb{R})$ eredita da $C([a,b],\mathbb{R})$ la norma $\|\cdot\|_\infty$, rispetto alla quale non è completo. Giustificare ...
- La funzione $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mapsto \|f'\|_\infty$ non è una norma. Perché?
- La funzione definita ponendo

  $$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{per ogni } f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$$

  Interpretazione grafica?

  è una norma, detta norma Lagrangiana di ordine 1.
- $(C^1([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$ è uno spazio di Banach. *Dimostrazione ...*

Per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, consideriamo l'insieme

$$C^k([a,b],\mathbb{R}) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile } k \text{ volte con derivata } k\text{-esima continua}\}$$

e la funzione definita ponendo

$$\|f\|_{C^k} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \ldots + \|f^{(k)}\|_\infty \quad \text{per ogni } f \in C^k([a,b],\mathbb{R}).$$

$\uparrow$ norma Lagrangiana di ordine k

Si riconosce facilmente che $(C^k([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^k})$ è uno spazio di Banach.

Nota

norma Lagrangiana di ordine 0

Ponendo $C([a,b],\mathbb{R}) =: C^0([a,b],\mathbb{R})$ e $\|\cdot\|_\infty =: \|\cdot\|_{C^0}$

otteniamo una successione di spazi di Banach tali che

$$C^k([a,b],\mathbb{R}) \subset C^{k-1}([a,b],\mathbb{R}), \quad \|f\|_{C^k} = \|f\|_{C^{k-1}} + \|f^{(k)}\|_{C^0}.$$

Serie di funzioni

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definiamo la funzione somma parziale n-esima associata a (f_n) ponendo

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$$

e chiamiamo serie di funzioni di termine f_n la successione di funzioni (S_n).

Se (S_n) converge puntualmente in X con funzione limite puntuale f, diciamo che la serie di funzioni di termine f_n converge puntualmente in X con funzione somma puntuale f.

Se (S_n) converge uniformemente in X con funzione limite uniforme f, diciamo che la serie di funzioni di termine f_n converge uniformemente in X con funzione somma uniforme f.

Nell'uno o nell'altro caso scriviamo $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Esplicitiamo le definizioni date.

- La serie di funzioni di termine f_n converge puntualmente in X con somma f se e solo se

$$\text{per ogni } x \in X\text{:} \lim_{n\to+\infty} |S_n(x) - f(x)| = 0;$$

  ciò equivale a dire che:

  per ogni $x \in X$ la serie di termine $f_n(x)$ converge con somma $f(x)$.

  In pratica: fisso x e studio la serie numerica di termine $f_n(x)$ con i criteri appresi in AM I.

- La serie di funzioni di termine f_n converge uniformemente in X con somma f se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |S_n(x) - f(x)| = 0.$$

  In pratica: cosa faccio, se non riesco a scrivere esplicitamente le somme parziali??

Sarebbe utile avere a disposizione condizioni necessarie e/o sufficienti ...

Osservazione

Notando che $f_n = S_n - S_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$, si deduce facilmente che:

- condizione necessaria affinché la serie di funzioni di termine f_n converga puntualmente in X è che la successione (f_n) converga puntualmente in X alla funzione costante di valore 0;
- condizione necessaria affinché la serie di funzioni di termine f_n converga uniformemente in X è che la successione (f_n) converga uniformemente in X alla funzione costante di valore 0.

Condizioni sufficienti?

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Diciamo che la serie di funzioni di termine f_n converge assolutamente in X se per ogni $x \in X$ la serie di termine $|f_n(x)|$ converge.

Diciamo che la serie di funzioni di termine f_n converge totalmente in X se la serie di termine $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x)|$ converge.

Equivalentemente:

esiste $(M_n) \subset [0, +\infty)$ tale che

- $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall\, x \in X, \forall\, n \in \mathbb{N}$
- la serie di termine M_n converge.

Osservazione

Se una serie di funzioni di termine f_n converge totalmente in X, allora essa converge assolutamente in X; il viceversa non è vero.

Esempio: $f_n(x) = n\,x\,e^{-n\,x}, \;\; x \in [0, +\infty)$

Osservazione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Se la serie di funzioni di termine f_n converge assolutamente:

per ogni $x \in X$ la serie di termine $|f_n(x)|$ converge, quindi: $\leftarrow$ AM I

per ogni $x \in X$ la serie di termine $f_n(x)$ converge,

ossia: la serie di funzioni di termine f_n converge puntualmente in X.

Teorema

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Se la serie di funzioni di termine f_n converge totalmente in X,

allora essa converge uniformemente in X.

Dimostrazione ...

Tabella riassuntiva dei tipi di convergenza ...

Esempi

Studiare la convergenza delle serie di funzioni di termini

$$\frac{\ln(1+x^{2n})}{n^2+1} \qquad \frac{\ln(1+x^{2n})}{n+1}$$

$\leftarrow$ Nota su convergenza uniforme e totale di serie di funzioni continue ...

$$n\,x\,e^{-nx} \qquad (-1)^n\,\frac{n}{x^{2n}+1} \qquad \frac{x}{x^2+n^2}$$

$$(-1)^n\,\frac{x^n}{n} \qquad (-1)^n\,\frac{x^4}{n+x^4}$$

$\leftarrow$ Criterio di Leibniz

$$\frac{\arctan(x^{2n})}{x^n} \qquad x \in (0,+\infty)$$

Proprietà generali della somma di una serie di funzioni

Si ottengono applicando alla successione delle somme parziali i corrispondenti risultati sulle successioni di funzioni; per ruolo delle ipotesi e possibili generalizzazioni valgono le medesime considerazioni.

1. La funzione somma uniforme di una serie di funzioni limitate è una funzione limitata.

2. La funzione somma uniforme di una serie di funzioni continue (in un punto o in un insieme) è una funzione continua (in quel punto o in quell'insieme).

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
   Se la serie di termine f_n converge uniformemente in $[a, b]$ con funzione somma f, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

integrazione termine a termine

4. Sia $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n \in C^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
Supponiamo che:

(i) esista $x_0 \in \mathrm{I}$ tale che la serie di termine $(f_n(x_0))$ converge;

(ii) la serie di termine f_n' converga uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in I.

Allora:

- la serie di termine f_n converge puntualmente in I e uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in I;
- la funzione somma f è di classe C^1 in I e si ha

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathrm{I}.$$

derivazione
termine a termine

Prima di proseguire: complementi di AM I

Sia (x_n) una successione di numeri reali. Sia $x \in \mathbb{R}$.

Diciamo che x è maggiorante definitivo [minorante definitivo] di (x_n) se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$ risulta $x_n \leq x$ $[x_n \geq x]$.

Sia $\mathcal{M}^*$ l'insieme dei maggioranti definitivi di (x_n).
Definiamo il massimo limite della successione ponendo

$$\lim_{n\to+\infty}'' x_n := \begin{cases} \inf \mathcal{M}^* & \text{se } \mathcal{M}^* \neq \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notazioni alternative

Sia $\mathcal{M}_*$ l'insieme dei minoranti definitivi di (x_n).
Definiamo il minimo limite della successione ponendo

$$\lim_{n\to+\infty}' x_n := \begin{cases} \sup \mathcal{M}_* & \text{se } \mathcal{M}_* \neq \emptyset \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempi

Determinare massimo limite e minimo limite di $x_n = (-1)^n$ e $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Osservazione

Sia (x_n) una successione di numeri reali e sia $L \in \mathbb{R}$.

Allora:

$L = \lim''_{n \to +\infty} x_n$ se e solo se

(i)* per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $x_n < L + \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$,

(ii)* per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ si ha $x_n > L - \varepsilon$ per infiniti indici;

$\uparrow$ "frequentemente"

$L = \lim'_{n \to +\infty} x_n$ se e solo se

(i)$_*$ per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $x_n > L - \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$,

(ii)$_*$ per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ si ha $x_n < L + \varepsilon$ per infiniti indici.

Osservazione

La successione (x_n) ha limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty}{}' x_n = \lim_{n\to+\infty}{}'' x_n = L.$$

$L \in \mathbb{R}$: oss. precedente
$L = \pm\infty$: definizione

Riesaminare gli esempi ...

Osservazione

Sia (x_n) una successione di numeri reali.

1. Esistono una successione estratta da (x_n) che tende a $\lim_{n\to+\infty}{}' x_n$ e una successione estratta da (x_n) che tende a $\lim_{n\to+\infty}{}'' x_n$.
2. Se $x \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite di una arbitraria successione estratta da (x_n), allora

$$\lim_{n\to+\infty}{}' x_n \le x \le \lim_{n\to+\infty}{}'' x_n.$$

Questo spiega il nome!

Alcune proprietà di massimo limite e minimo limite

Siano (x_n) e (y_n) due successioni di numeri reali.

1. $\inf_n x_n \leq \lim_{n\to+\infty}' x_n \leq \lim_{n\to+\infty}'' x_n \leq \sup_n x_n$

2. Se $x_n \leq y_n$ per ogni n, allora:
$$\lim_{n\to+\infty}' x_n \leq \lim_{n\to+\infty}' y_n \qquad \lim_{n\to+\infty}'' x_n \leq \lim_{n\to+\infty}'' y_n.$$

3. $\lim_{n\to+\infty}'' (x_n + y_n) \leq \lim_{n\to+\infty}'' x_n + \lim_{n\to+\infty}'' y_n$

   $\lim_{n\to+\infty}' (x_n + y_n) \geq \lim_{n\to+\infty}' x_n + \lim_{n\to+\infty}'' y_n$

4. Se $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}_+$, allora:

   $\lim_{n\to+\infty}'' (x_n \cdot y_n) \leq \lim_{n\to+\infty}'' x_n \cdot \lim_{n\to+\infty}'' y_n$

   $\lim_{n\to+\infty}' (x_n \cdot y_n) \geq \lim_{n\to+\infty}' x_n \cdot \lim_{n\to+\infty}' y_n$

} a eccezione delle forme di indecisione

Nota

Nelle proprietà ❸ e ❹ possono valere le disuguaglianze strette.

Esempi . . .

Le uguaglianze sono garantite se una delle due successioni è regolare.

Ulteriore proprietà

❺ Se $a_n > 0$ per ogni n, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}{}' \frac{a_{n+1}}{a_n} \;\le\; \lim_{n\to+\infty}{}' \sqrt[n]{a_n} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty}{}'' \sqrt[n]{a_n} \;\le\; \lim_{n\to+\infty}{}'' \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Verifica . . .

Criterio della radice

Sia (x_n) una successione di numeri reali e sia $L := \lim''_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$.

- Se $L \in [0,1)$ la serie di termine x_n converge assolutamente;
- se $L \in (1,+\infty]$ la serie di termine x_n non converge;
- se $L = 1$ non si può dire nulla sul carattere della serie di termine x_n.

Dimostrazione . . . Risultato analogo per il rapporto?

Criterio del rapporto

Sia (x_n) una successione di numeri reali con $x_n \neq 0$ definitivamente.

Supponiamo che esista $L := \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$.

Allora: valgono le stesse conclusioni del criterio della radice.

Fine dei complementi

Serie di potenze

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia (c_n) una successione di numeri reali.
Consideriamo le funzioni definite ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(x) = c_0\,, \qquad f_n(x) = c_n\,(x - x_0)^n \quad (n \geq 1)$$

La corrispondente serie di funzioni si chiama serie di potenze di centro x_0 e coefficienti (c_n). (Nel prossimo semestre: serie di potenze in $\mathbb{C}$)

Esempi

- Tra le serie considerate a pag. 19 c'è la serie di potenze di centro 0 e coefficienti $c_0 = 0$, $c_n = (-1)^n/n \ \ (n \geq 1)$
- La serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$ è la serie di potenze di centro 0 e coefficienti $c_n = 1 \ \ (n \in \mathbb{N})$
- La serie esponenziale è la serie di potenze di centro 0 e coefficienti $c_n = 1/n! \ \ (n \in \mathbb{N})$

Osservazioni

- L'insieme di convergenza puntuale di una serie di potenze è sempre non vuoto: la serie converge per $x = x_0$ con somma c_0.
- Senza perdere di generalità, nella trattazione della teoria possiamo assumere $x_0 = 0$.

Lemma (fondamentale sulle serie di potenze)

Sia data la serie di potenze di centro 0 e coefficienti (c_n).

Se la serie converge in $\bar{x} \neq 0$, allora essa converge

- assolutamente nell'intervallo $(-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$,
- totalmente in ciascun intervallo compatto contenuto in $(-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$.

Dimostrazione ...

Sia data la serie di potenze di centro 0 e coefficienti (c_n).
Posto

$$\alpha := \lim_{n \to +\infty}{}'' \sqrt[n]{|c_n|} \qquad \in [0, +\infty]$$

definiamo

$$R := \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = +\infty \\ \dfrac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

reciproco in senso ampliato di α

R si chiama raggio di convergenza della serie di potenze.

Esempi

↓ per brevità

Determinare il r.d.c. delle serie di potenze di termine

$$(-1)^n \frac{x^n}{n} \qquad x^n \qquad x^{2n} \qquad \frac{x^n}{n!} \qquad n!\, x^n$$

Osservazione $\leftarrow$ criterio di d'Alembert per la determinazione del r.d.c.

Sia data la serie di potenze di centro 0 e coefficienti (c_n), con $c_n \neq 0$.
Se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} =: \alpha$$

allora il r.d.c. della serie è uguale al reciproco in senso ampliato di α.

Basta tenere presente la proprietà 5 di massimo e minimo limite

Riesaminare gli ultimi due esempi della pagina precedente ...

Teorema (struttura dell'insieme di convergenza)

Sia R il r.d.c. della serie di potenze di centro 0 e coefficienti (c_n).
Allora:

1. $R \in (0, +\infty) \implies$ la serie converge assolutamente per $|x| < R$ e non converge per $|x| > R$
2. $R = +\infty \implies$ la serie converge assolutamente in $\mathbb{R}$
3. $R = 0 \implies$ la serie converge solo per $x = 0$

Dimostrazione . . .

Nota

Nelle tre affermazioni del teorema valgono le implicazioni inverse.
In 1 l'implicazione inversa va intesa come segue:

se esiste $\beta \in (0, +\infty)$ tale che la serie converge assolutamente per $|x| < \beta$ e non converge per $|x| > \beta$, allora $R \in (0, +\infty)$ e $R = \beta$.

Nota

In base al teorema, l'insieme di convergenza puntuale di una serie di potenze è un intervallo, simmetrico rispetto al centro della serie (con la possibile eccezione degli estremi), di semi-ampiezza uguale al r.d.c. della serie. Perché "raggio"?

Osservazione

Supponiamo che una serie di potenze abbia r.d.c. $R \neq 0$.

Se $R = +\infty$, il comportamento della serie è completamente determinato. Infatti, la serie:

- converge assolutamente in $\mathbb{R}$; teorema sul r.d.c.
- converge totalmente (e quindi uniformemente) in qualsiasi intervallo compatto; teorema sul r.d.c. + lemma fondamentale
- non converge uniformemente (e quindi totalmente) in $\mathbb{R}$. perché?

Se $R \in (0, +\infty)$, la serie:

- converge assolutamente in $(-R, R)$ e non converge puntualmente in $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$; teorema sul r.d.c.
- converge totalmente (e quindi uniformemente) in qualsiasi intervallo compatto contenuto in $(-R, R)$. teorema sul r.d.c. + lemma fondamentale

Convergenza puntuale e assoluta negli estremi?

Informazioni aggiuntive sulla convergenza nel caso $R \in (0, +\infty)$

- Il teorema non specifica se gli estremi dell'intervallo di convergenza puntuale fanno parte o meno dello stesso; la convergenza puntuale negli estremi dell'intervallo di convergenza deve essere studiata caso per caso.   Esempi ...
- Se la serie converge in un estremo dell'intervallo di convergenza, allora converge uniformemente nell'intervallo chiuso di estremi il centro della serie e l'estremo in cui converge. (Teorema di Abel)
- La serie converge assolutamente in entrambi gli estremi dell'intervallo di convergenza o in nessuno dei due.
- La serie converge totalmente in $[-R, R]$ se e solo se converge assolutamente negli estremi dell'intervallo di convergenza.

Esempio

Riesaminare la serie di termine $(-1)^n \dfrac{x^n}{n}$.

Esercizio teorico

Esplicitare nel caso di serie di potenze di centro qualsiasi tutti i risultati ottenuti nel caso di centro 0.

Esempi

Studiare la convergenza delle serie di termine

$$(2^n + 3^n)\, x^n \qquad \frac{(x+1)^n}{(n+1)\, 2^n} \qquad \frac{x^{2n}}{n}$$

$$\frac{(-1)^n\, n^2}{n^4+2}\left(\frac{x^2-3}{x+2}\right)^n \qquad \frac{(x^2-3)^n e^{nx}}{e^{2n}+1}$$

$$\frac{n\, 2^n + 1}{n^2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^n$$

"riconducibili" a serie di potenze

Proprietà generali della somma di una serie di potenze

Nelle tre proposizioni seguenti denotiamo con f la funzione somma della serie di potenze di centro x_0, coefficienti (c_n) e raggio di convergenza $R \in (0, +\infty]$.

Proposizione (continuità)

f è continua in tutto l'intervallo di convergenza puntuale.

Motivazione ...

Proposizione (integrazione termine a termine)

Per ogni x appartenente all'intervallo di convergenza puntuale si ha

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(x-x_0)^n.$$

Motivazione ...

Osservazione

La serie di potenze ottenuta integrando termine a termine ha lo stesso raggio di convergenza della serie data; lo stesso è vero per la serie delle derivate. *Verifica ...*

Proposizione (derivazione termine a termine)

f è di classe C^∞ in $(x_0 - R, x_0 + R)$ con

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, c_n\, (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, c_{n+1}\, (x - x_0)^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, c_n\, (x - x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n\, (x - x_0)^{n-k} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Motivazione ...

Osservazione

Dall'ultima uguaglianza della pagina precedente, ponendo $x = x_0$ si ottiene $f^{(k)}(x_0) = k!\, c_k$, che equivale a

$$(*) \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

La relazione $(*)$ ha alcune importanti conseguenze.
Per incominciare:

Principio di identità delle serie di potenze

Se due serie di potenze con lo stesso centro hanno la stessa somma in un intorno del centro, allora hanno gli stessi coefficienti e sono quindi identiche.

Motivazione ...

Esaminiamo la seconda conseguenza della relazione

$$(*) \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Se f è la funzione somma di una serie di potenze di centro x_0 con raggio di convergenza $R \neq 0$, allora i coefficienti di tale serie soddisfano $(*)$, quindi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - R, x_0 + R)\,.$$

Dunque:
l'unica serie di potenze di cui una data funzione f può essere somma è la serie di Taylor di centro x_0 di f.

↑ Relazione con polinomi di Taylor?

Funzioni sviluppabili in serie di Taylor

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$ e x_0 un punto interno ad A.

Diciamo che f è sviluppabile in serie di Taylor (o analitica) in x_0 se esiste $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ ,$$

ossia se f coincide con la somma della propria serie di Taylor di centro x_0 in un intorno di x_0.

Note

- Non tutte le funzioni di classe C^∞ sono sviluppabili in serie di Taylor. Esempio. . . già visto in Analisi I ?
- Le funzioni somma di serie di potenze sono sviluppabili in serie di Taylor, nel centro (ovvio!) ma non solo. Spiegare . . .

Teorema (condizione sufficiente per l'analiticità)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$ e x_0 un punto interno ad A.

Se la successione di funzioni $(f^{(n)})$ è equi-limitata in un intorno di x_0, allora f è sviluppabile in serie di Taylor in x_0.

Esplicitando: se esistono $M, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ tali che

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Dimostrazione . . .

Esempi

Le funzioni seno, coseno, esponenziale sono sviluppabili in serie di Taylor in $x_0 = 0$ con raggio di convergenza $R = +\infty$. ▸ grafici

E la funzione logaritmo?

Osservazione

Per quanto notato a pagina 40, per riconoscere che una funzione è sviluppabile in serie di Taylor in x_0 è sufficiente riuscire a scriverla come somma di una serie di potenze di centro x_0 con raggio di convergenza non nullo. Pertanto: a partire da sviluppi di Taylor noti, se ne possono ottenere altri per integrazione o derivazione termine a termine, oppure attraverso manipolazioni algebriche.

Esempi

- La funzione $x \mapsto \ln(1+x)$ è sviluppabile in serie di Taylor in $x_0 = 0$ con raggio di convergenza $R = 1$. ▸ grafici
- La funzione arcotangente è sviluppabile in serie di Taylor in $x_0 = 0$ con raggio di convergenza $R = 1$. Ostruzione? Piano complesso!
- Le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico sono sviluppabili in serie di Taylor in $x_0 = 0$ con raggio di convergenza $R = +\infty$.

Alcune applicazioni delle serie di potenze

1. Valutazione di funzioni trascendenti

   Calcolare $\cos(0.5)$ con un errore inferiore a 10^{-3}.

   Calcolare $\ln(1.2)$ con un errore inferiore a 10^{-3}. $\ln(0.7)$? $\ln(2.5)$?

2. Integrazione approssimata

   Calcolare $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ a meno di 10^{-3}. $\longrightarrow$ funzione degli errori, distribuzione normale

   Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ con un errore inferiore a 10^{-4}.

   Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x^2)}{x^3}\,dx$ con un errore inferiore a 10^{-4}.

3 Soluzione in serie di potenze di equazioni differenziali lineari (solo un cenno)

Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0,$$

con coefficienti a_0 e a_1 definiti in un intervallo I.

Presupposto teorico

Dato $t_0 \in \mathrm{I}$, supponiamo che i coefficienti siano funzioni analitiche in t_0. Allora:

- l'equazione ammette un sistema fondamentale di soluzioni costituito da funzioni analitiche in t_0;
- i raggi di convergenza delle serie corrispondenti alle due soluzioni sono non inferiori al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenze corrispondenti ai coefficienti.

Procedimento

1. Scriviamo la soluzione come somma di una serie di potenze, i cui coefficienti sono incogniti; deriviamo termine a termine e sostituiamo nell'equazione.
2. Applicando il principio di identità delle serie di potenze, otteniamo una relazione ricorsiva tra i coefficienti.
3. Calcoliamo i coefficienti e otteniamo la soluzione.

Esempi

Risolvere in serie di potenze le seguenti equazioni differenziali

- $y'' + y = 0$ soluzione già nota!
- $y'' - t\,y = 0$ equazione di Airy ▸ grafici
- $(t^2 + 1)\,y'' + t\,y' - y = 0$ $\leftarrow$ prodotto tra serie di potenze ...

Polinomi trigonometrici e serie trigonometriche

Un polinomio trigonometrico di ordine n è una combinazione lineare delle funzioni 1 e $\cos(k\,x)$, $\sin(k\,x)$, con $k \in \{1, \ldots, n\}$. Esplicitando:

$$(*) \qquad P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big[a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)\big],$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ ("coefficienti").

Osservazione

Il polinomio trigonometrico in $(*)$ è una funzione definita in $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 2π. Si possono definire polinomi trigonometrici di arbitrario periodo $T \in (0, +\infty)$ considerando combinazioni lineari delle funzioni

$$\cos\Big(\frac{2\pi}{T}\,k\,x\Big) \qquad \sin\Big(\frac{2\pi}{T}\,k\,x\Big).$$

In quanto segue consideriamo prevalentemente $T = 2\pi$.

Siano date le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

La serie di funzioni costruita a partire dalla successione di funzioni

$$a_0, \quad a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x), \quad a_2 \cos(2\,x) + b_2 \sin(2\,x), \quad \dots$$

si chiama serie trigonometrica di coefficienti (a_n) e (b_n).

Successione delle somme parziali?

Esempio

Studiare la convergenza della serie trigonometrica di coefficienti $a_n = \dfrac{n^6}{n!}$ e $b_n = 0$.

Osservazione

Condizione sufficiente affinché la serie trigonometrica di coefficienti (a_n) e (b_n) converga totalmente in $\mathbb{R}$ è che le serie numeriche di termine a_n e b_n siano assolutamente convergenti. Motivazione ...

Coefficienti, polinomi e serie di Fourier – preliminari

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π, ci poniamo i seguenti problemi:

$\uparrow$ 2π-periodica

- Esiste una serie trigonometrica che converge a f in qualche senso opportuno?
- Esiste un polinomio trigonometrico che approssima la funzione meglio degli altri polinomi trigonometrici, in qualche senso opportuno?
- In caso affermativo, come si individuano la serie o il polinomio, ossia: come si scelgono i coefficienti?

Formule di ortogonalità $\leftarrow$??

Siano $n, m \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m = 0 \\ \pi & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \quad (n = m = 0) \\ \pi & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \quad 0 \quad \forall n, m$$

Nota

Le funzioni $1,\ \cos(x),\ \sin(x),\ \cos(2\,x),\ \sin(2\,x),\ \ldots$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare definito in $C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ ponendo

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx\,.$$

norma indotta $=$
norma quadratica

Coefficienti, polinomi e serie di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica.

Supponiamo che f e le funzioni

$$x \mapsto f(x)\cos(n\,x)\,, \qquad x \mapsto f(x)\sin(n\,x) \qquad (n \geq 1)$$

siano integrabili secondo Riemann (o in senso generalizzato) in $[-\pi, \pi]$.

Definiamo i coefficienti di Fourier di f ponendo

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

e per $n \geq 1$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx \qquad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n\,x)\,dx.$$

Perché proprio queste formule?

Chiamiamo polinomio di Fourier di f di ordine n il polinomio trigonometrico di ordine n che ha per coefficienti i coefficienti di Fourier di f; lo denotiamo con F_n.

Chiamiamo serie di Fourier di f la serie trigonometrica che ha per coefficienti i coefficienti di Fourier di f; denotiamo la sua somma con F.

Osservazione

Dato che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è 2π-periodica, nel definire i coefficienti di Fourier possiamo calcolare gli integrali in qualsiasi intervallo di ampiezza 2π.

Scegliere l'intervallo $[-\pi, \pi]$, che è simmetrico rispetto a 0, permette di sfruttare eventuali simmetrie della funzione f:

- se f è pari, allora:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx\,, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(n\, x)\, dx\,, \qquad b_n = 0\,;$$

- se la restrizione di f a $(-\pi, \pi)$ è dispari, allora:

$$a_n = 0\,, \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(n\, x)\, dx.$$

Perché non "f dispari"?

Esempi

Scrivere le serie di Fourier delle seguenti funzioni:

1. il prolungamento 2π-periodico della funzione $x \in [0, 2\pi) \mapsto (x - \pi)^2$
2. il prolungamento 2π-periodico della funzione $x \in [-\pi, \pi) \mapsto x$
3. il prolungamento pari e 2π-periodico della funzione $x \in [0, \pi] \mapsto \pi - x$
4. la funzione mantissa $\leftarrow$ serie di Fourier per funzioni T-periodiche ...

Polinomi di Fourier e distanza quadratica

$\uparrow$ "pseudo-distanza"

Proposizione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica e Riemann-integrabile.

Sia F_n il polinomio di Fourier di f di ordine n $(n \geq 1)$.

Se P_n è un qualsiasi polinomio trigonometrico di ordine n, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx$$

cioè:

tra tutti i polinomi trigonometrici di ordine n, il polinomio di Fourier è quello che minimizza la distanza quadratica da f.

Verifica ...

Nota

Siano $a_0, a_1, b_1, \ldots$ i coefficienti di Fourier di f.
Sfruttando le formule di ortogonalità, si dimostra che

$$2\,a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \qquad \text{disuguaglianza di Bessel}$$

da cui si deduce facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \text{teorema di Riemann-Lebesgue}$$

Interpretazione "fisica"?

Convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier

Richiamo

Diciamo che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ di $[a, b]$ tale che

- f è continua in (x_{i-1}, x_i) per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$;
- f ammette limiti unilaterali finiti in ciascuno dei punti $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Diciamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se è tale in ogni intervallo compatto.

Osservazione

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua a tratti, allora è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo compatto.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ definiamo i numeri reali

$$f(x^+) := \lim_{t \to 0^+} f(x+t), \qquad f(x^-) := \lim_{t \to 0^-} f(x+t).$$

Definiamo $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\widetilde{f}(x) := \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

La funzione $\widetilde{f}$ si chiama funzione regolarizzata di f.

Nota: nei punti in cui f è continua, $\widetilde{f}$ e f coincidono.

Funzioni regolarizzate negli esempi ❶ - ❹ ...

Diciamo che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è regolare a tratti se esiste una suddivisione $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ di $[a, b]$ tale che

- f è di classe C^1 in (x_{i-1}, x_i) per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$;
- f' ammette limiti unilaterali finiti in ciascuno dei punti $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Diciamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è regolare a tratti se è tale in ogni intervallo compatto.

Nota: ogni funzione regolare a tratti è anche continua a tratti.

f regolare a tratti equivale a f' continua a tratti? Quasi ...

Diciamo che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona a tratti se esiste una suddivisione $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ di $[a, b]$ tale che

- la restrizione di f a (x_{i-1}, x_i) è monotona per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Diciamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona a tratti se è tale in ogni intervallo compatto.

Teorema (convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica e continua a tratti.

1. Se f è regolare a tratti oppure monotona a tratti, allora la serie di Fourier di f converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione regolarizzata di f.
2. Se f è regolare a tratti e continua, allora la serie di Fourier di f converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$.
3. Se f è regolare a tratti e ha punti di discontinuità, allora la serie di Fourier di f converge a f uniformemente in ogni intervallo compatto che non contiene tali punti.

Dimostrazione di 2 ...

Nota

Il teorema fornisce condizioni solo sufficienti per la convergenza delle serie di Fourier; esistono risultati di convergenza puntuale anche per funzioni non limitate. Qualche ipotesi ci vuole, però!

Esempi

Studiare la convergenza delle serie di Fourier negli esempi 1 - 4.

▸ grafici per esempio 3

Esempio (onda quadra)

Scrivere la serie di Fourier della funzione 2π-periodica ottenuta prolungando la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0] \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

e studiarne la convergenza. ▸ grafici

Esempio

Sia f la funzione periodica di periodo 4 tale che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in [0, 2), \\ 4 - \dfrac{x}{2} & \text{se } x \in [2, 4). \end{cases}$$

- Discutere la applicabilità del teorema di convergenza puntuale e uniforme alla serie di Fourier associata a f.
- Determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a f.

Osservazione (integrazione termine a termine)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e continua a tratti.
Siano $a_0, a_1, b_1, \ldots$ i suoi coefficienti di Fourier.
Allora:
per ogni $x, x_0 \in [-\pi, \pi]$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} a_0\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))\, dt.$$

Verifica . . .

Nota

Questo risultato non è deducibile dal teorema di integrazione termine a termine per serie di funzioni qualsiasi: non supponendo f continua, non è detto che la serie di Fourier converga uniformemente a f.

Applicazione delle serie di Fourier: calcolo della somma di serie numeriche

Già calcolate: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Data la funzione $f(x) = |\sin(x)|$, periodica di periodo π,

- discutere l'applicabilità dei teoremi di convergenza puntuale e uniforme alla serie di Fourier associata a f;
- determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a f;
- utilizzare il punto precedente per calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}\,.$$

A P P E N D I C E

Dimostrazione: convergenza totale implica convergenza uniforme

Suppongo che la serie di funzioni di termine f_n converga totalmente in X; per definizione, questo equivale a dire che la serie numerica di termine $\sup_{x \in X} |f_n(x)|$ è convergente.

Devo dimostrare che la serie di funzioni di termine f_n converge uniformemente in X; per definizione, questo equivale a dire che, posto

$$S_n := f_0 + \ldots + f_n \quad \text{per ogni } n,$$

la successione di funzioni (S_n) converge uniformemente in X.

Ricordo che, se una serie numerica converge, la successione dei suoi termini è infinitesima, perciò limitata.

Dunque: esiste $C \in (0, +\infty)$ tale che $\sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq C$ per ogni n.

Pertanto: e ovviamente anche S_n

ciascuna f_n è una funzione limitata, ossia un elemento di $B(X, \mathbb{R})$.

Utilizzo allora la notazione $\|f_n\|_\infty$ in luogo di $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \leq C$ e riformulo l'ipotesi: la serie di termine $\|f_n\|_\infty$ converge.

Ciò equivale a dire che, posto

$$T_n := \|f_0\|_\infty + \ldots + \|f_n\|_\infty \quad \text{per ogni } n,$$

la successione di numeri reali (T_n) converge, pertanto è di Cauchy.

Fisso $\varepsilon > 0$.

In corrispondenza, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, m, n \geq \nu : \; |T_m - T_n| < \varepsilon$$

che equivale a dire

$$\forall\, n \geq \nu, \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} : \; |T_{n+k} - T_n| < \varepsilon$$

cioè

$$\forall\, n \geq \nu, \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} : \; \|f_{n+1}\|_\infty + \ldots + \|f_{n+k}\|_\infty < \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza triangolare, l'ultima disuguaglianza scritta implica

$$\|f_{n+1} + \ldots + f_{n+k}\|_\infty < \varepsilon.$$

Ricapitolando, ho verificato che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \forall\, n \geq \nu, \ \ \forall\, k \in \mathbb{N} : \ \|S_{n+k} - S_n\|_\infty < \varepsilon$$

che equivale a

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \forall\, m, n \geq \nu : \ \|S_m - S_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Dunque: la successione (S_n) è di Cauchy rispetto alla distanza d_∞ indotta in $B(X, \mathbb{R})$ dalla norma $\|\cdot\|\infty$.

$\downarrow$ per la completezza di $\mathbb{R}$

Siccome $(B(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ è uno spazio metrico completo, deduco che (S_n) converge in $(B(X, \mathbb{R}), d_\infty)$.

Ricordando che la convergenza rispetto alla distanza d_∞ equivale alla convergenza uniforme, deduco che la successione (S_n) converge uniformemente in X. $\square$

Utilizzo del criterio di Leibniz per lo studio della convergenza uniforme di una serie di funzioni

Per ogni n, siano $g_n : X \to \mathbb{R}_+$ e $f_n := (-1)^n g_n$.
Supponiamo che per ogni $x \in X$ la successione numerica $(g_n(x))$ sia infinitesima e decrescente. $\leftarrow$ (f_n) soddisfa puntualmente in X le ipotesi del criterio di Leibniz

Allora:

- la serie di termine f_n converge puntualmente in X;
- denotata con S_n la somma parziale n-esima e con f la somma della serie, per ogni $x \in X$: $|S_n(x) - f(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$;
- la serie di termine f_n converge uniformemente in X **se e solo se** la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in X alla funzione costante di valore 0.

Quindi: per una serie di funzioni che soddisfa puntualmente le condizioni del criterio di Leibniz, la condizione necessaria per la convergenza uniforme è anche sufficiente.

Attenzione!!

Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, sia $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Notiamo che:

- $b_1 = 0$ e $b_n > 0$ per ogni $n \geq 2$;
- $b_n \sim c_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
- (c_n) è decrescente, quindi la serie di termine $(-1)^n c_n$ converge;
- la serie di termine $(-1)^n b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ diverge positivamente!

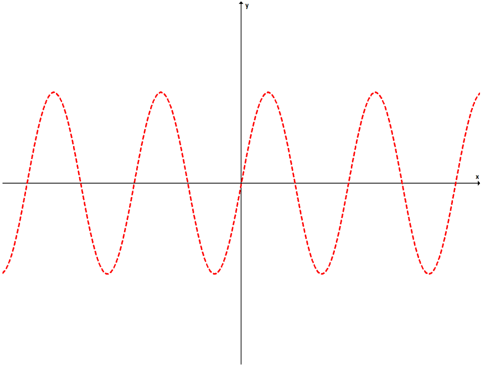
Come si spiega?

Due successioni asintoticamente equivalenti non hanno necessariamente la stessa monotonia. Esempi ...

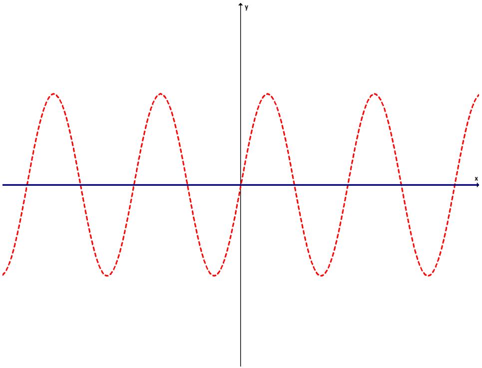
Quindi: nella verifica della ipotesi di monotonia prevista nel criterio di Leibniz NON è lecito sostituire la successione $\{b_n\}$ con una successione asintoticamente equivalente.

G R A F I C I

Funzione seno: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

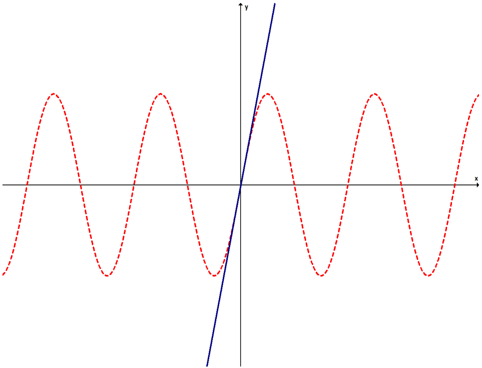


Funzione seno: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$



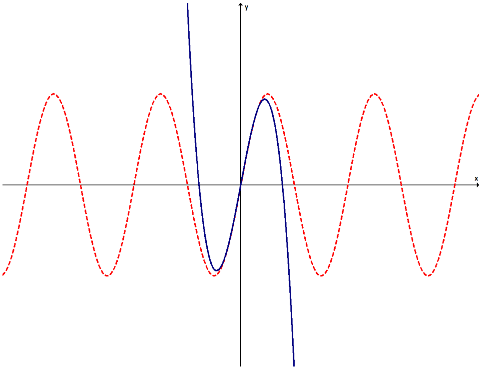
$T_{0,0}(x) = 0$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$



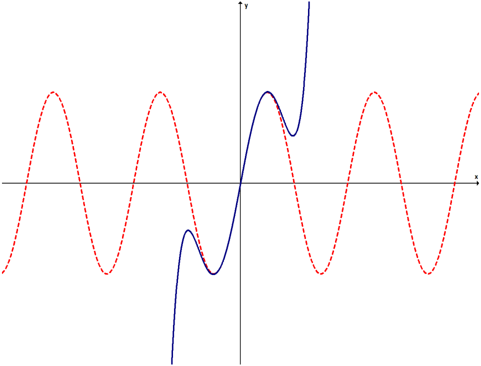
$T_{0,1}(x) = T_{0,2}(x) = x$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$



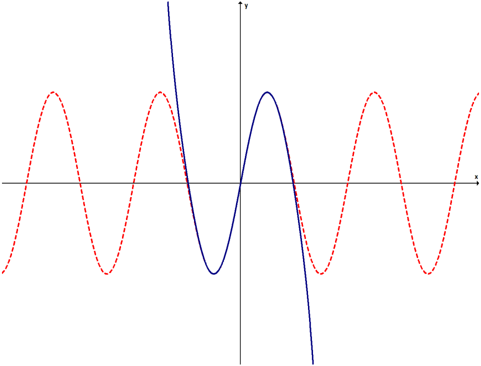
$$T_{0,3}(x) = T_{0,4}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$



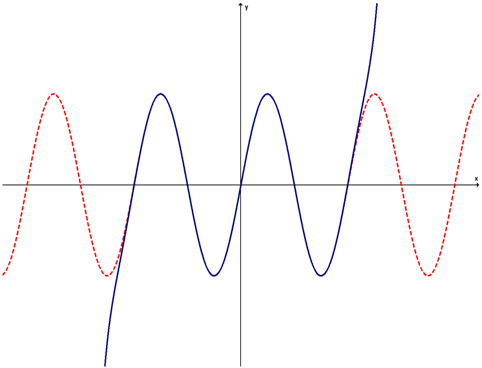
$$T_{0,5}(x) = T_{0,6}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x), \;\; x_0 = 0$



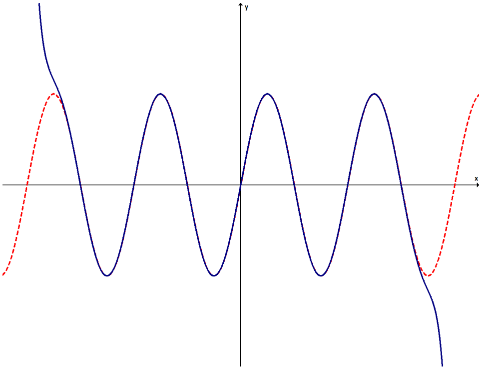
$$T_{0,7}(x) = T_{0,8}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$



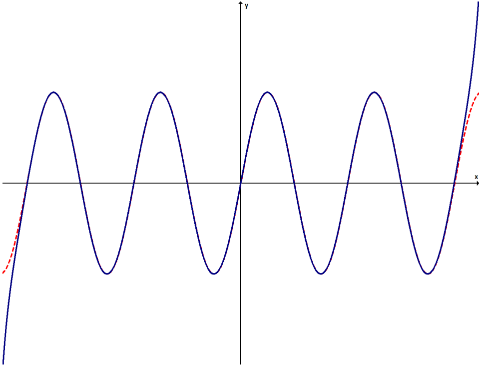
$$T_{0,17}(x) = T_{0,18}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{17}}{17!}$$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x), \;\; x_0 = 0$



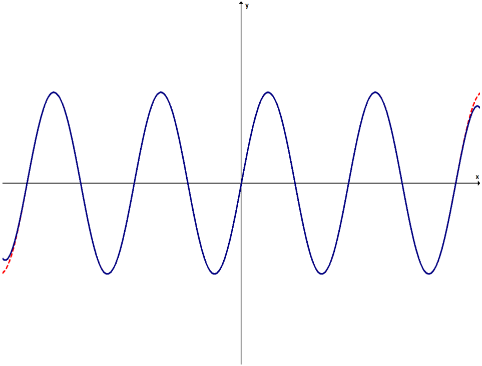
$$T_{0,27}(x) = T_{0,28}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots - \frac{x^{27}}{27!}$$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$



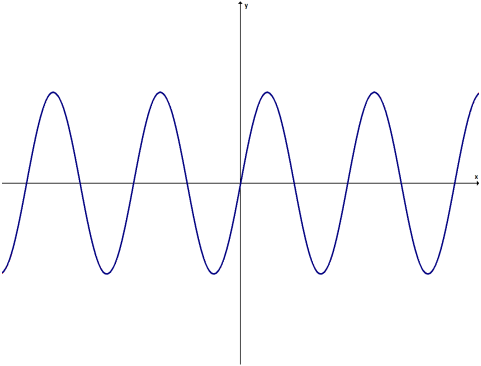
$$T_{0,33}(x) = T_{0,34}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{33}}{33!}$$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$



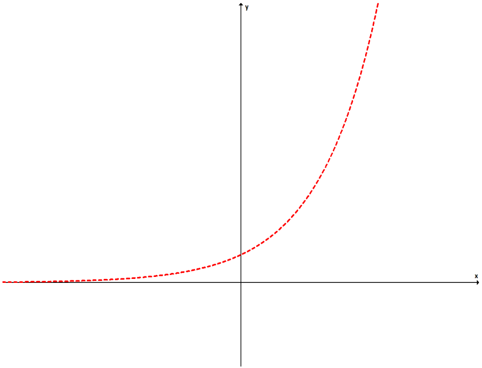
$$T_{0,35}(x) = T_{0,36}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots - \frac{x^{35}}{35!}$$

Funzione seno: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

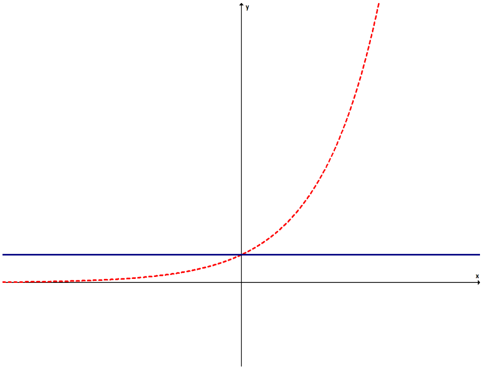


$$T_{0,39}(x) = T_{0,40}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots - \frac{x^{39}}{39!}$$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x, \;\; x_0 = 0$

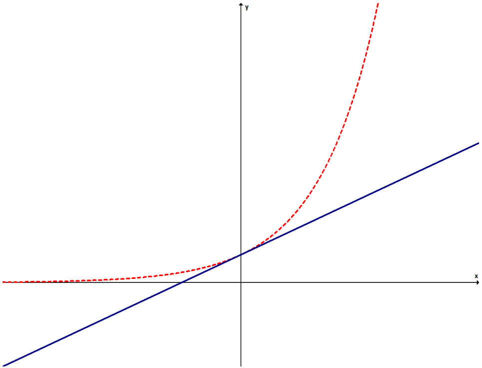


Funzione esponenziale: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$



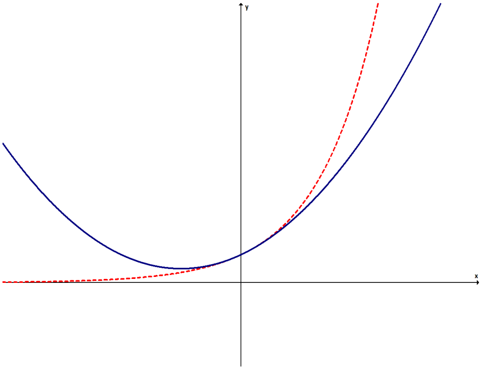
$T_{0,0}(x) = 1$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x, \;\; x_0 = 0$



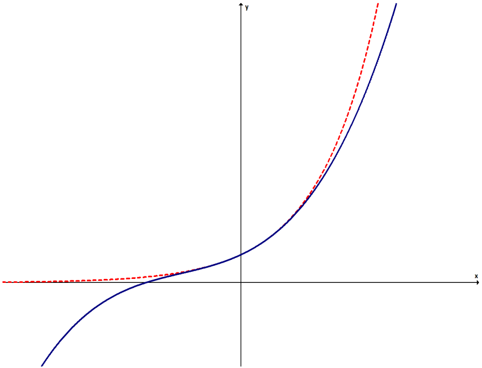
$T_{0,1}(x) = 1 + x$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$



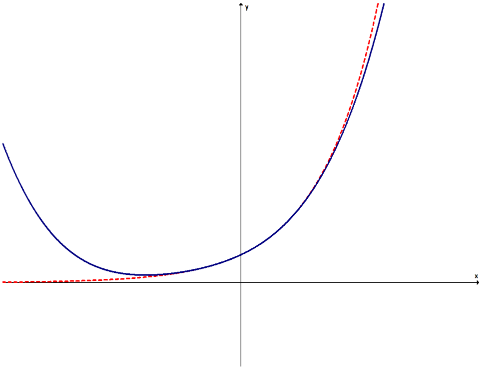
$$T_{0,2}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x, \ x_0 = 0$



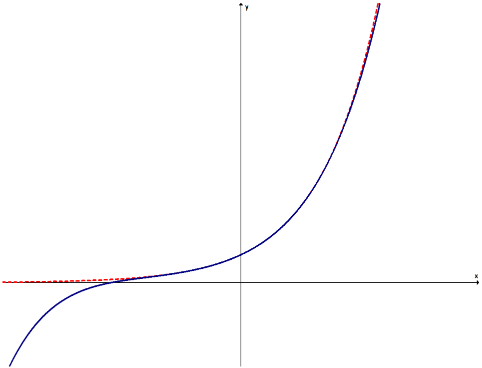
$$T_{0,3}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x, \;\; x_0 = 0$



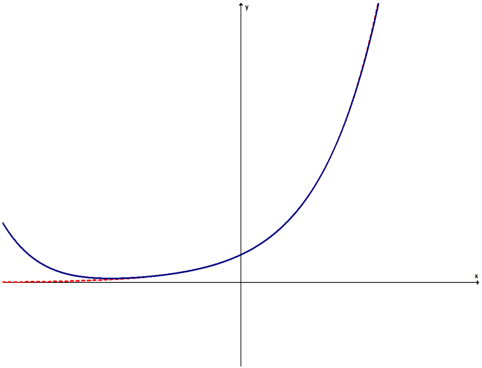
$$T_{0,4}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x, \;\; x_0 = 0$



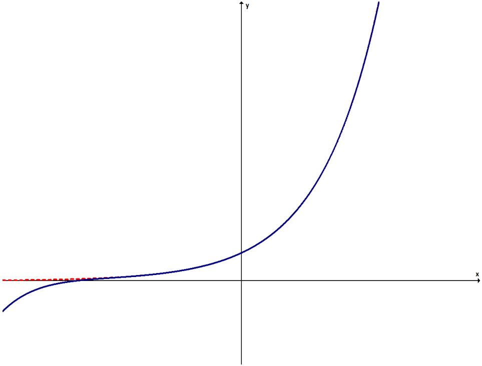
$$T_{0,5}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$



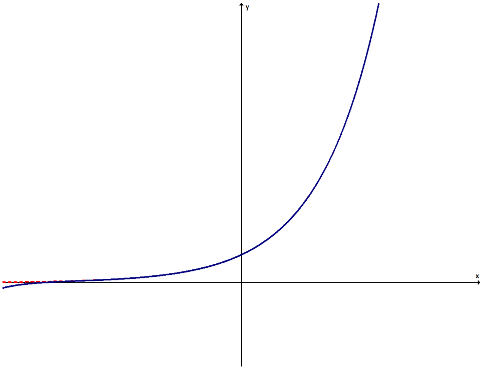
$$T_{0,6}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x, \;\; x_0 = 0$



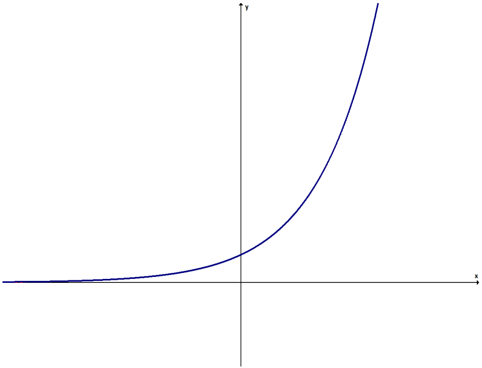
$$T_{0,7}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$



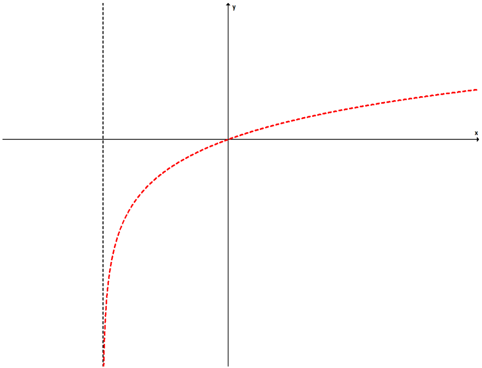
$$T_{0,9}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^9}{9!}$$

Funzione esponenziale: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x_0 = 0$

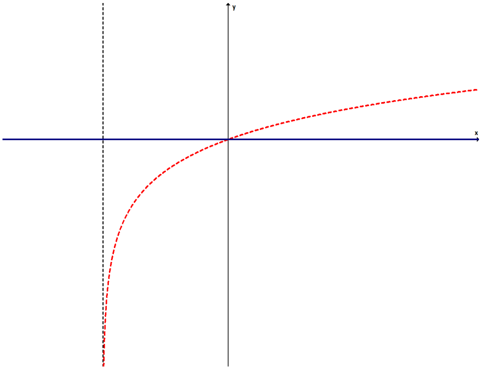


$$T_{0,12}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{12}}{12!}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x), \;\; x_0 = 0$

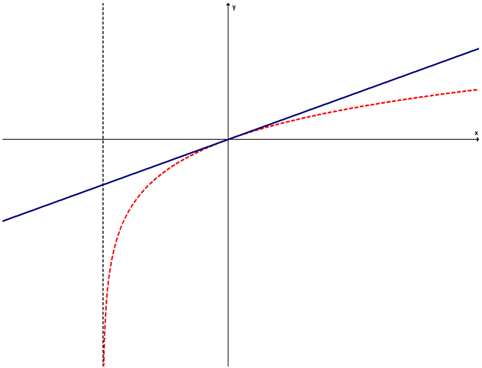


Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$



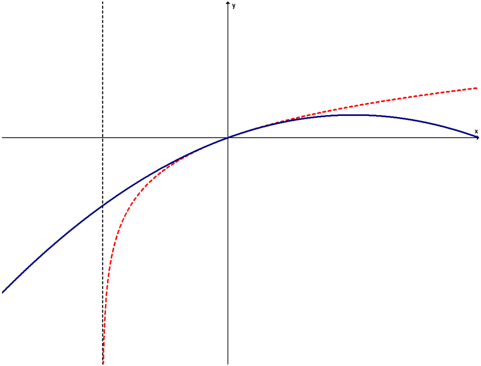
$T_{0,0}(x) = 0$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1 + x), \ \ x_0 = 0$



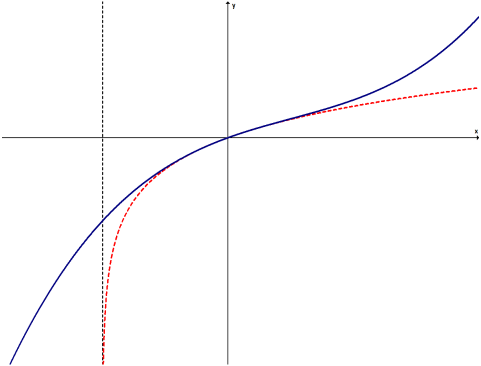
$T_{0,1}(x) = x$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$



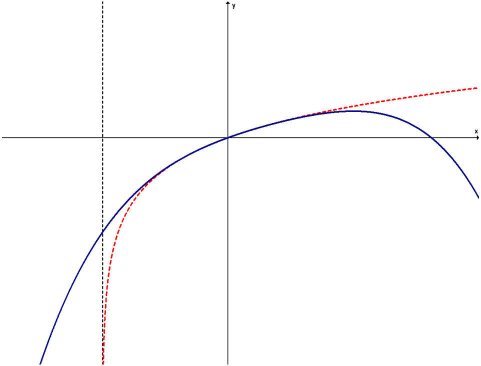
$$T_{0,2}(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$



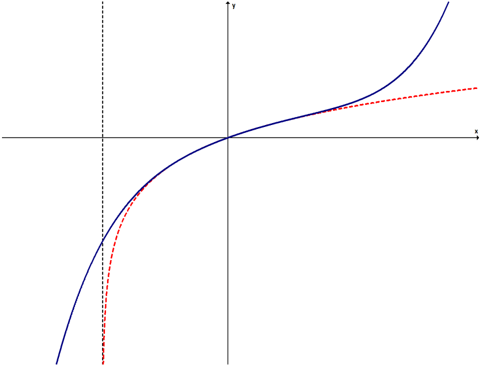
$$T_{0,3}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$



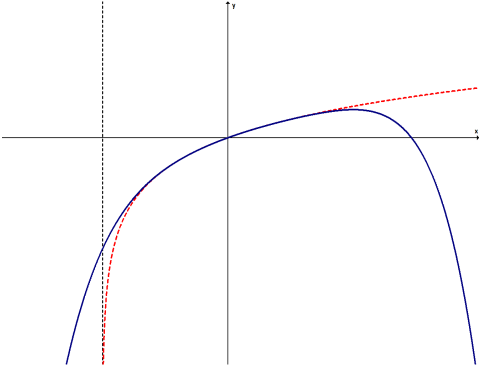
$$T_{0,4}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$



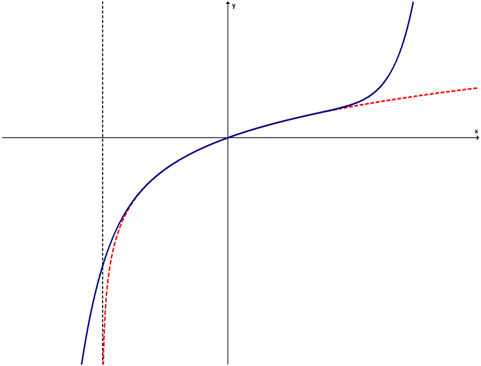
$$T_{0,5}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$



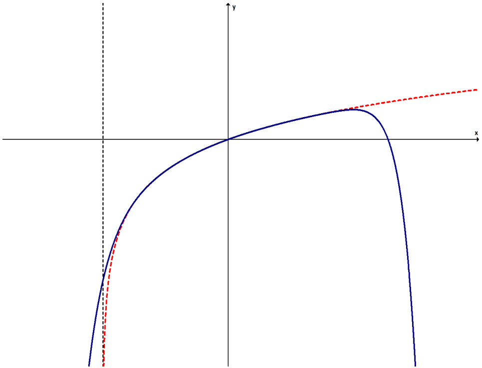
$$T_{0,6}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x), \;\; x_0 = 0$



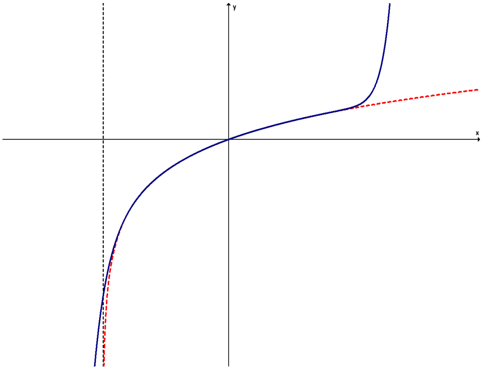
$$T_{0,9}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^9}{9}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$



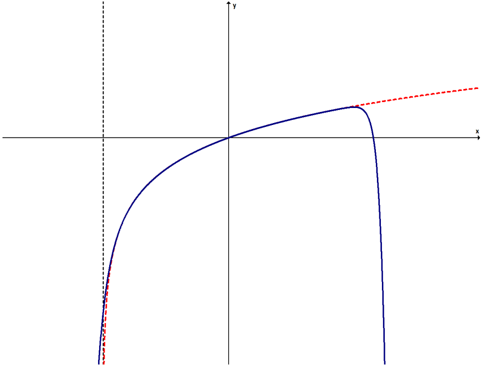
$$T_{0,12}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{12}}{12}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$



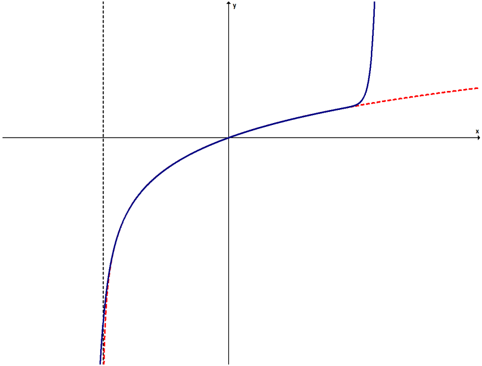
$$T_{0,17}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{17}}{17}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1 + x), \;\; x_0 = 0$



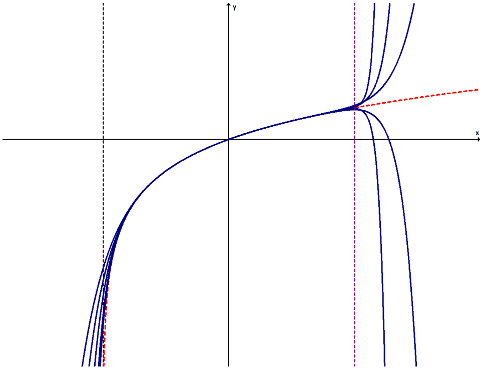
$$T_{0,26}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{26}}{26}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

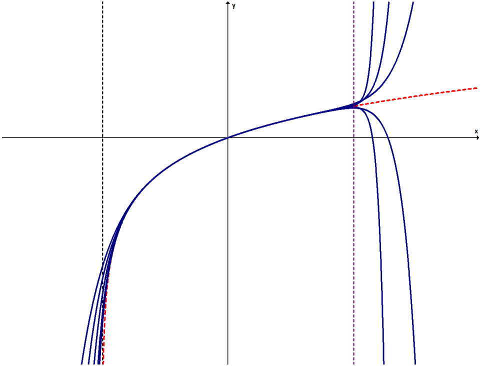


$$T_{0,33}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{33}}{33}$$

Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$



Funzione logaritmo: $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$

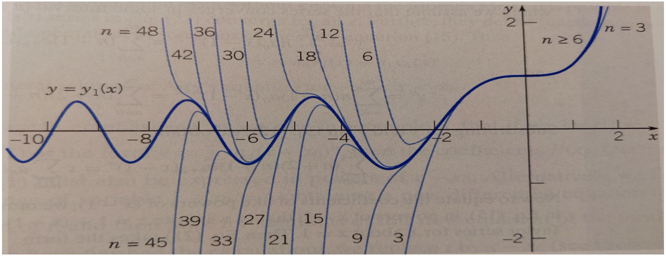


Cosa succede per $x = 1$?

Soluzioni dell'equazione di Airy

$y_1(0) = 1$

$y_1'(0) = 0$



$y_2(0) = 0$

$y_2'(0) = 1$

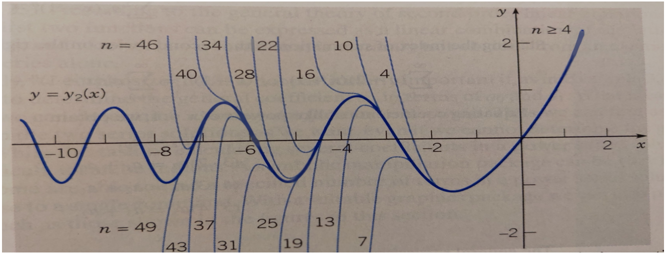


Grafico di f

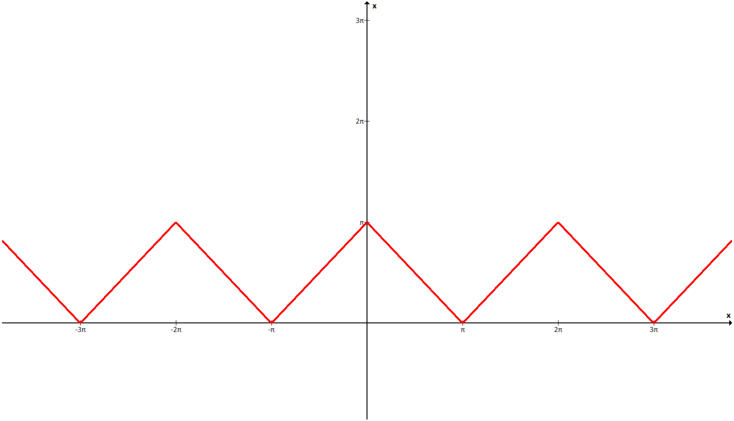


Grafico di $\tilde{f}$

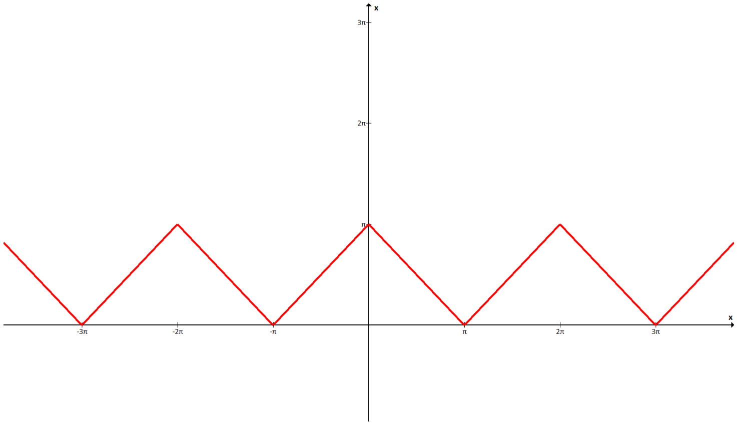
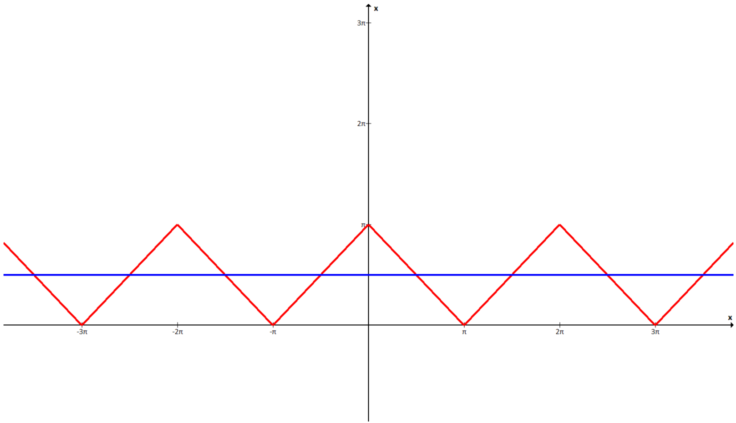
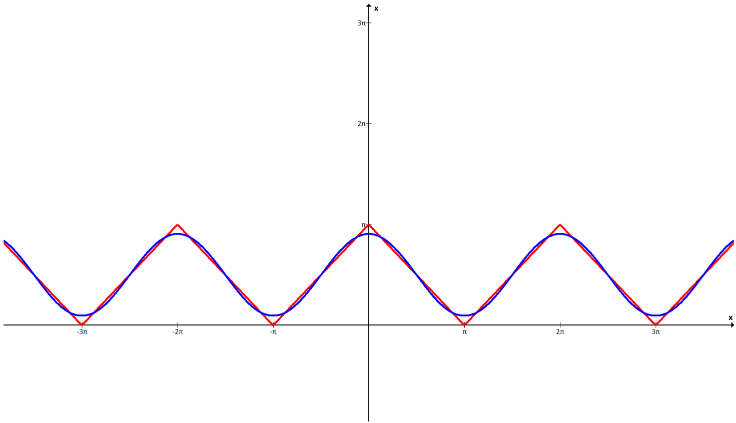


Grafico di f e di F_0



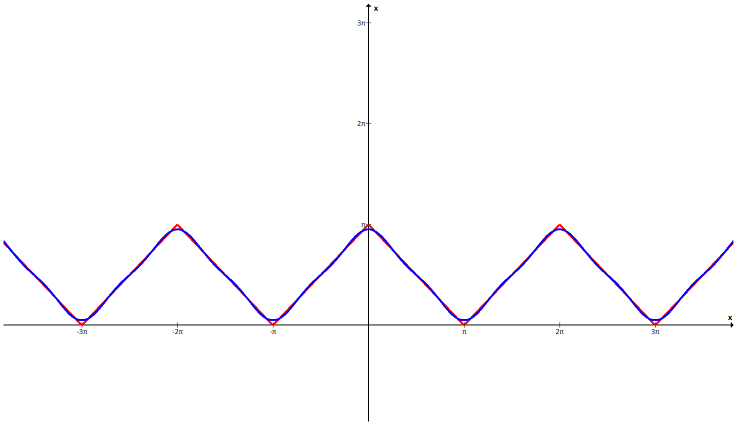
$$F_0(x) = \frac{\pi}{2}$$

Grafico di f e di F_1



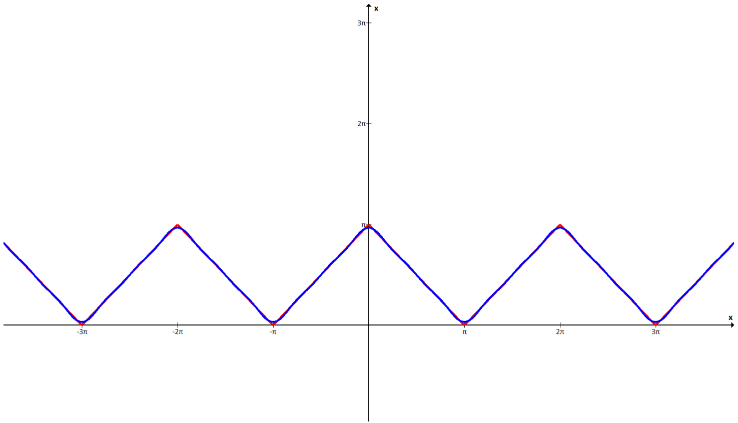
$$F_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos(x)$$

Grafico di f e di F_3



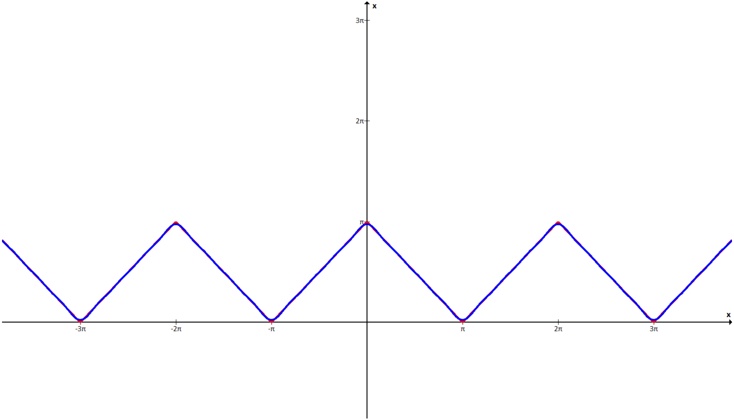
$$F_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9}\right)$$

Grafico di f e di F_5



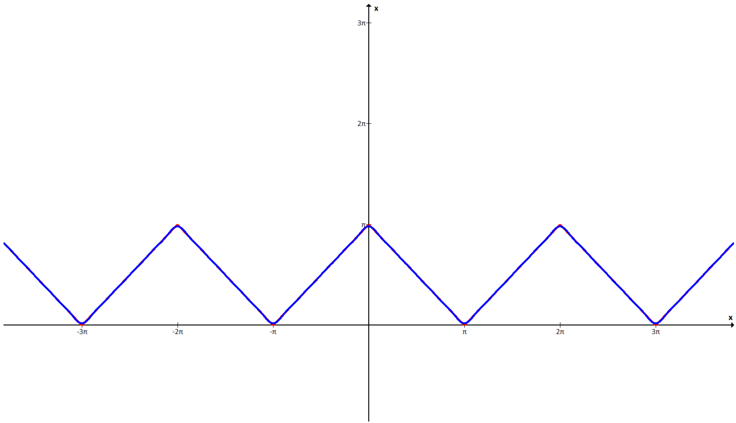
$$F_5(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25}\right)$$

Grafico di f e di F_7



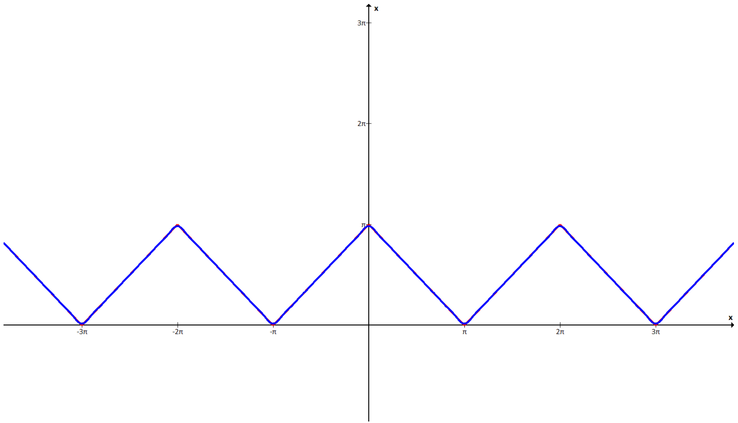
$$F_7(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots + \frac{\cos(7x)}{49}\right)$$

Grafico di f e di F_9



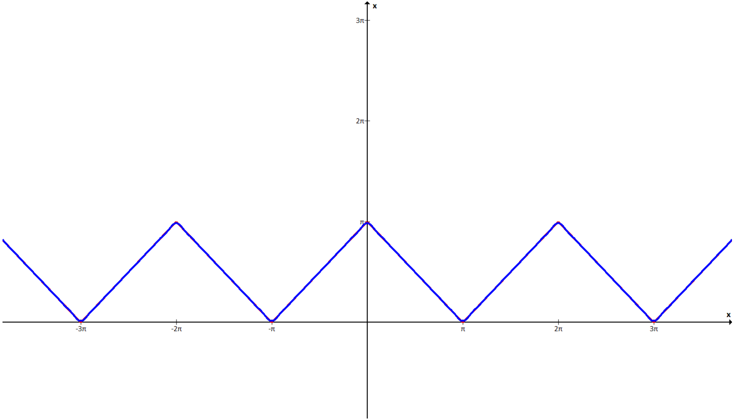
$$F_9(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots + \frac{\cos(9x)}{81}\right)$$

Grafico di f e di F_{11}



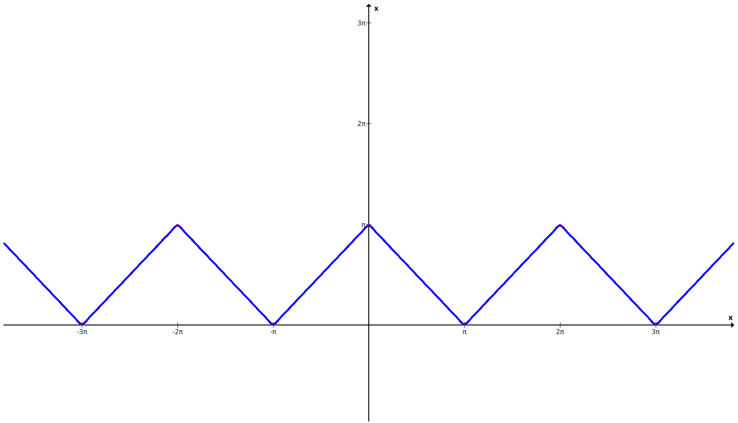
$$F_{11}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots + \frac{\cos(11x)}{121}\right)$$

Grafico di f e di F_{13}



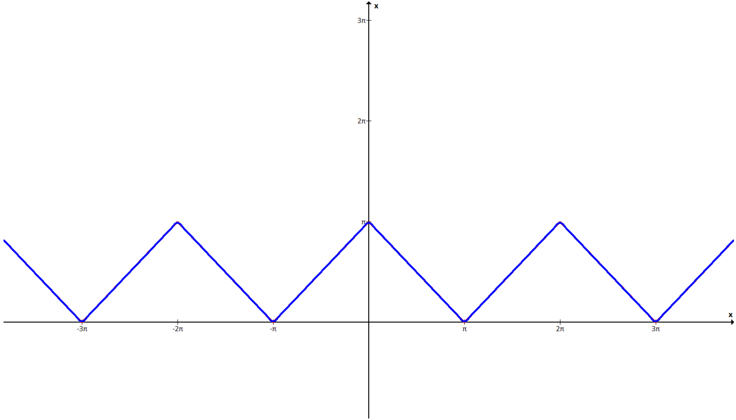
$$F_{13}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots + \frac{\cos(13x)}{169}\right)$$

Grafico di f e di F_{15}



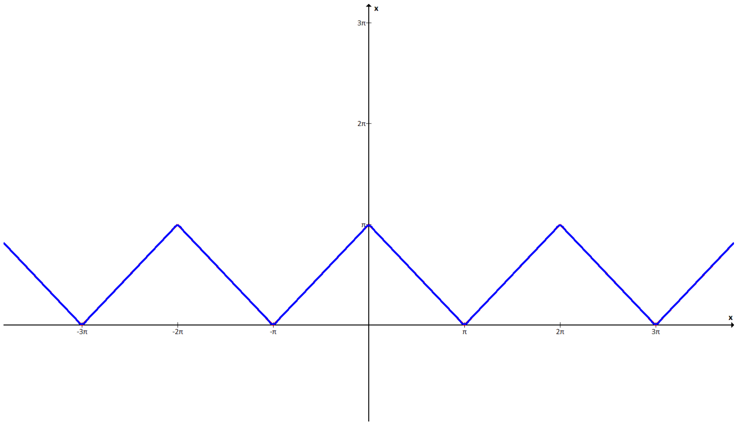
$$F_{15}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots + \frac{\cos(15x)}{225}\right)$$

Grafico di f e di F_{17}



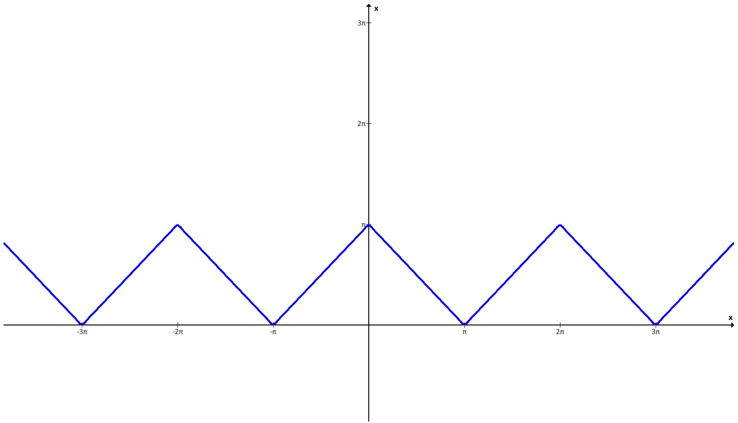
$$F_{17}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots + \frac{\cos(17x)}{289}\right)$$

Grafico di f e di F_{19}



$$F_{19}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots + \frac{\cos(19x)}{361}\right)$$

Grafico di f e di F_{19}



$$F_{19}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots + \frac{\cos(19x)}{361}\right)$$

Grafico di f

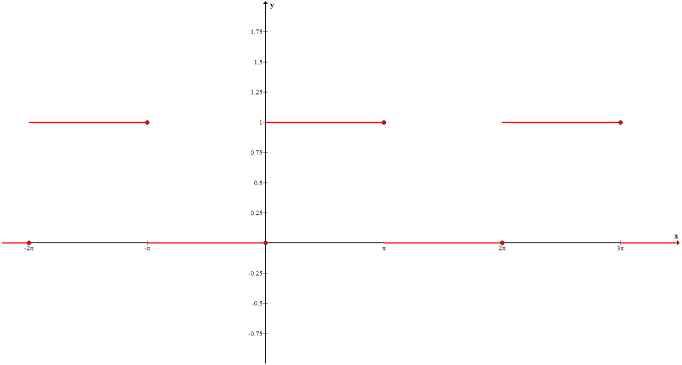


Grafico di $\tilde{f}$

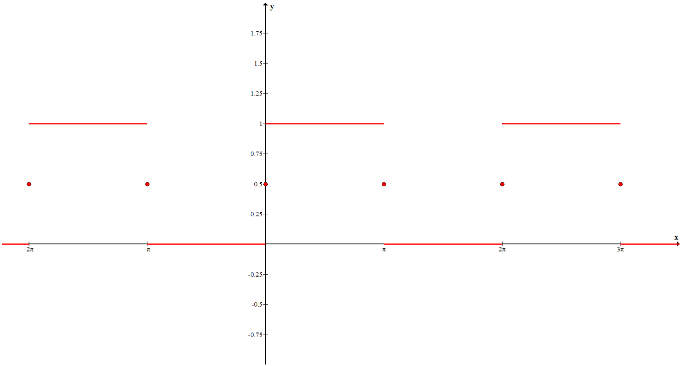


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_0

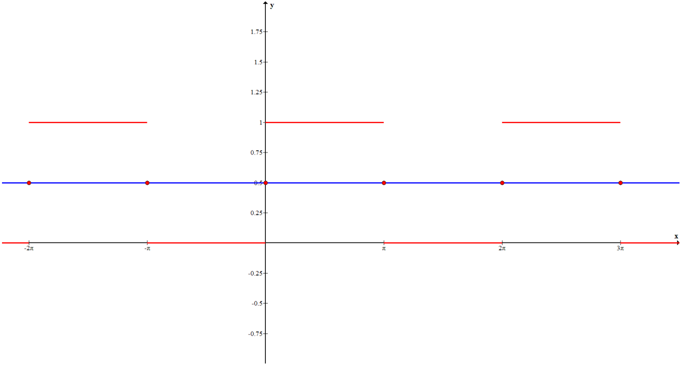


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_1

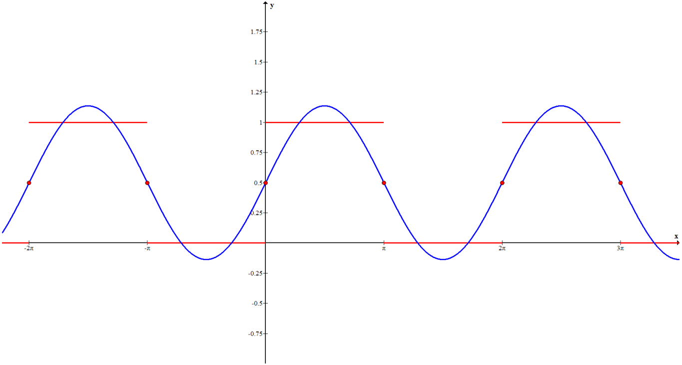


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_3

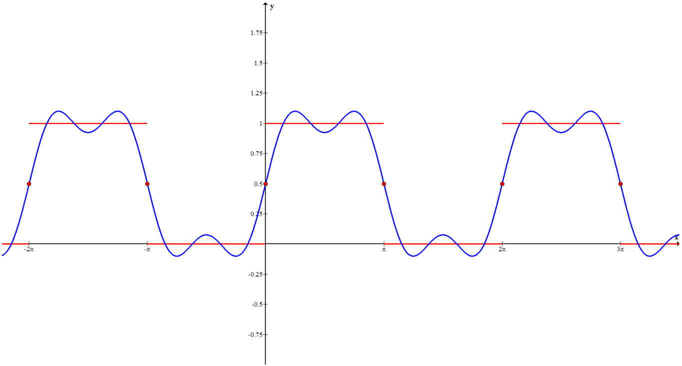


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_5

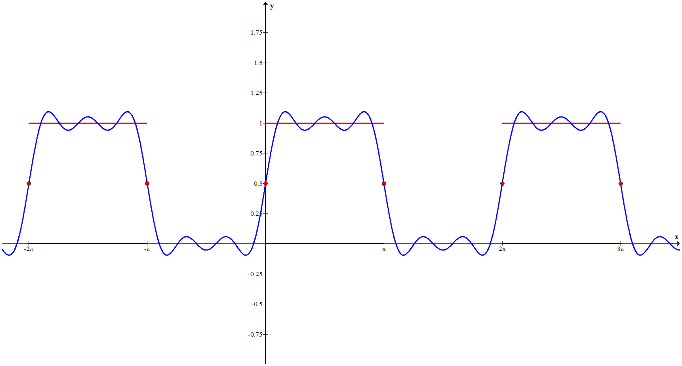


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_7

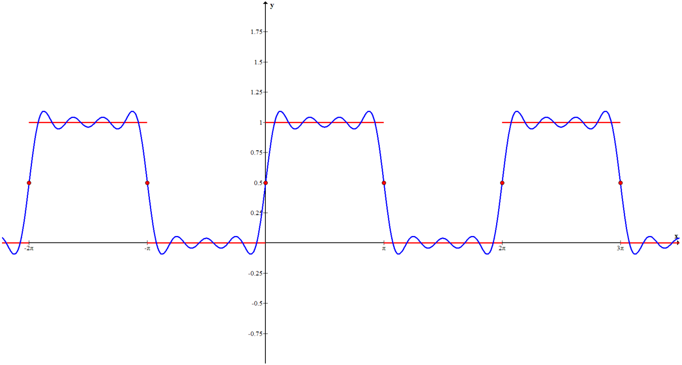


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_{13}

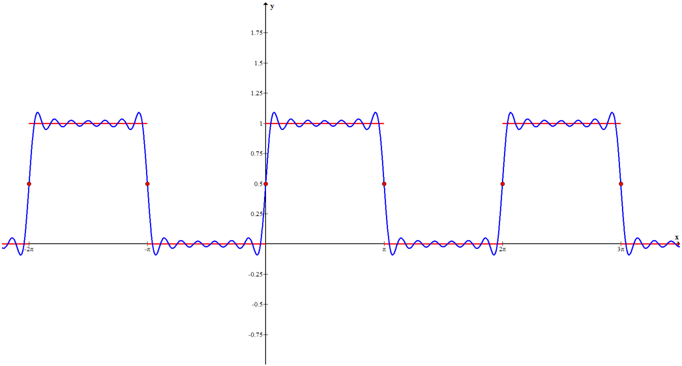


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_{25}

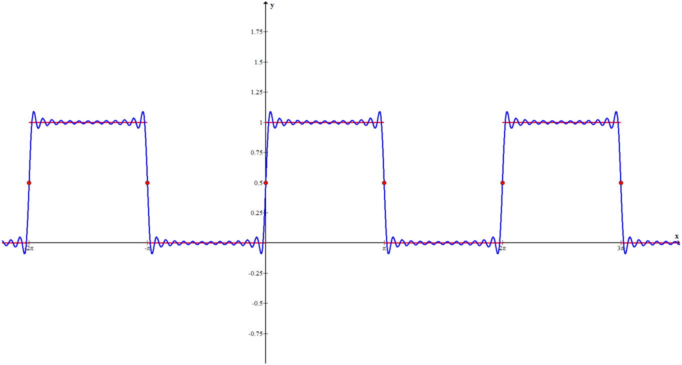


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_{41}

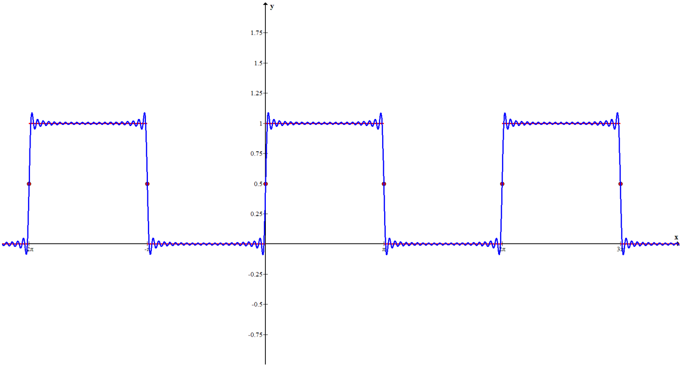


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_{75}

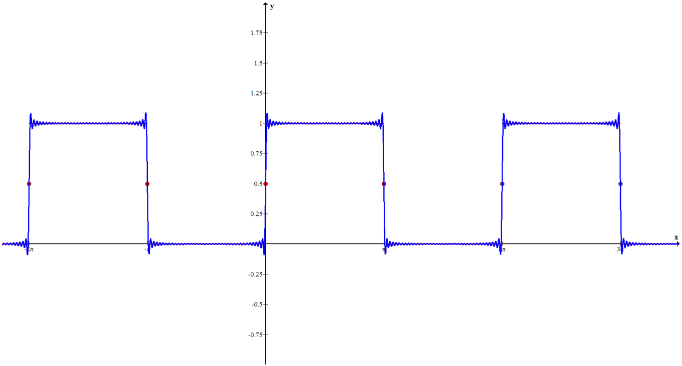


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_{75}

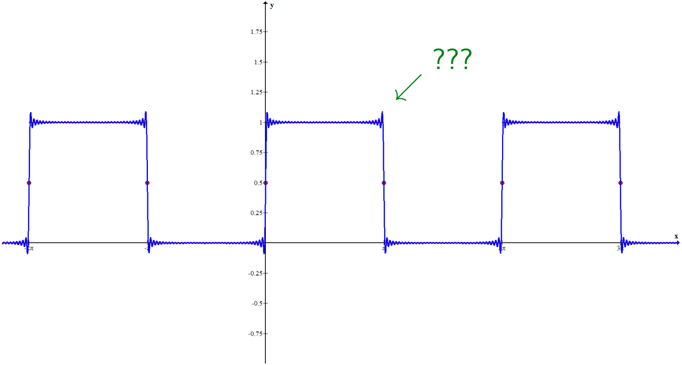
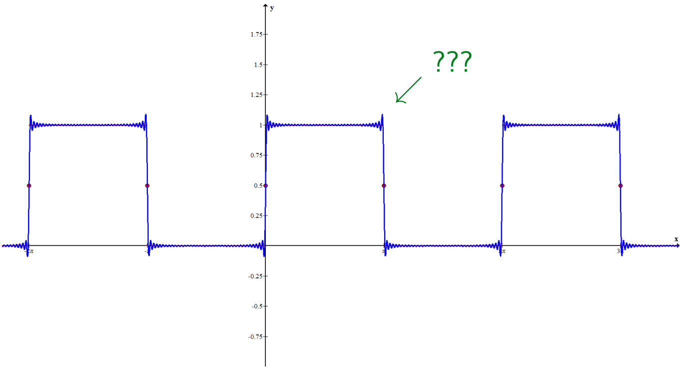
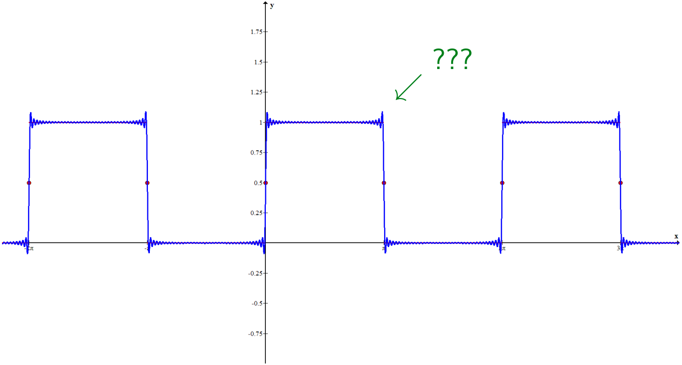


Grafico di $\tilde{f}$ e di F_{75}



In prossimità dei punti di discontinuità, l'oscillazione di F_n è maggiore del salto di f; si può dimostrare che la prima grandezza è maggiore di circa il 18% rispetto alla seconda.

Grafico di $\tilde{f}$ e di F_{75}



In prossimità dei punti di discontinuità, l'oscillazione di F_n è maggiore del salto di f; si può dimostrare che la prima grandezza è maggiore di circa il 18% rispetto alla seconda.
Questo comportamento si osserva in generale, cioè per qualsiasi funzione con punti di discontinuità; viene chiamato fenomeno di Gibbs.