a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica III

Spazi metrici

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online; non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Spazi metrici

Sia X un insieme qualsiasi (non vuoto). Una metrica o distanza in X è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- **D1** $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- **D2** $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;
- **D3** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$. disuguaglianza triangolare

La coppia (X, d) si chiama spazio metrico; X si chiama sostegno dello spazio metrico.

Esempio (spazio metrico discreto)

Sia X un insieme con almeno due elementi. La funzione definita in $X \times X$ ponendo

$$d_{DIS}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una metrica, detta metrica discreta. Verifica ...

Esempio (spazio metrico euclideo)

Ricordiamo che in $\mathbb{R}^n$ si definisce la norma euclidea ponendo

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n} := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

La funzione definita in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ponendo

$$d_{\mathbb{R}^n}(x, y) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n}$$

è una metrica, detta metrica euclidea. Verifica ...

Per $n = 1$ viene detta anche metrica del valore assoluto.

Osservazione

Utilizzando la disuguaglianza triangolare si ottiene facilmente la seconda disuguaglianza triangolare:

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z) \quad \text{per ogni } x, y, z \in X.$$

Verifica . . .

Osservazione

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$.

Sia d^A la restrizione della metrica d all'insieme $A \times A$.

- La funzione d^A è una metrica in A, detta metrica indotta in A.
- La coppia (A, d^A) è uno spazio metrico, che chiamiamo sottospazio metrico di (X, d).

Elementi di topologia in uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $x_0 \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.

L'insieme

$$B_r(x_0) := \left\{ x \in X \mid d(x, x_0) < r \right\}$$

si chiama intorno sferico (o palla) di centro x_0 e raggio r.

Confrontare con la definizione data in $\mathbb{R}^n$ ...

Esempi

$\downarrow$ sottinteso: con la metrica del valore assoluto

Descrivere gli intorni sferici in $\mathbb{R}$ e in uno spazio metrico discreto.

Osservazione (proprietà di separazione)

In qualsiasi spazio metrico, elementi distinti ammettono intorni disgiunti.

Verifica ...

Come fatto nel corso di AM II per lo spazio metrico euclideo $\mathbb{R}^n$, partendo dalla nozione di intorno sferico si possono introdurre le nozioni di

- punto interno, esterno, di frontiera, di accumulazione;
- interiore, frontiera, derivato, chiusura di un insieme;
- insieme aperto, insieme chiuso.

Formuliamole insieme ...

Esempio

In uno spazio metrico discreto:

- identificare la frontiera di un qualsiasi sottoinsieme;
- identificare gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi.

Osservazione

Le proprietà sulle operazioni insiemistiche con insiemi aperti e con insiemi chiusi, già viste nello spazio metrico euclideo $\mathbb{R}^n$, valgono in un generico spazio metrico (X, d). Ricordiamole:

- Un insieme $E \subseteq X$ è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso, ed è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto.
- L'unione di una arbitraria famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto; l'intersezione di una arbitraria famiglia di insiemi chiusi è un insieme chiuso.
- L'intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è un insieme aperto; l'unione di una famiglia finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

Esempi (da ricordare)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $x_0 \in X$ e $r \in \mathbb{R}^*_+$.

- L'intorno sferico $B_r(x_0)$ è aperto.

  Verificare per esercizio utilizzando la disuguaglianza triangolare.

- L'insieme $\{x \in X \mid d(x, x_0) > r\}$ è aperto.

  Verificare per esercizio utilizzando la seconda disuguaglianza triangolare.

- L'insieme $\{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ è chiuso.

  $\uparrow =: \overline{B}_r(x_0)$ intorno sferico chiuso (o palla chiusa)

- Gli insiemi $\{x \in X \mid d(x, x_0) \geq r\}$ e $\{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ sono chiusi.

  $\uparrow =: S_r(x_0)$ sfera

Osservazione

Nello spazio metrico euclideo: $S_r(x_0) = \partial B_r(x_0)$; in uno spazio metrico generico, l'uguaglianza non è garantita. Esempio . . .

Esercizio

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia E un sottoinsieme di X.

Verificare che:

$\downarrow$ per inclusione

- l'interiore di E è il più grande insieme aperto contenuto in E;
- la chiusura di E è il più piccolo insieme chiuso contenente E.

Insiemi limitati e funzioni limitate

Richiamo di AM II

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$.

Diciamo che E è limitato se esiste una palla (chiusa) che contiene E, cioè se esistono $\bar{x} \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ tali che $d(x, \bar{x}) \leq r$ per ogni $x \in E$.

Osservazioni

- Gli intorni sferici sono limitati.
- La chiusura e la frontiera di un insieme limitato sono insiemi limitati.
- In uno spazio metrico discreto, tutti gli insiemi sono limitati. Perché?

Sia X un insieme qualsiasi e sia (Y, d_Y) uno spazio metrico.

Diciamo che una funzione $f : X \to Y$ è limitata se la sua immagine $f(X)$ è un insieme limitato nello spazio metrico (Y, d_Y).

In simboli:

esistono $\bar{y} \in Y$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ tali che $d_y(f(x), \bar{y}) \leq r$ per ogni $x \in X$.

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia (x_n) una successione di elementi di X.

Diciamo che (x_n) converge nello spazio metrico (X, d) se esiste $x \in X$ soddisfacente una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

(a) ogni intorno di x contiene x_n definitivamente. — definizione topologica

(b) per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ risulta $d(x_n, x) < \varepsilon$ definitivamente — "traduzione" di (a)

(c) $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$ — definizione metrica

In tal caso, diciamo che (x_n) converge a x, oppure che x è il limite di (x_n), e scriviamo $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ oppure $x_n \to x$.

Osservazione (unicità del limite) $\leftarrow$ segue dalla proprietà di separazione

Una successione non può convergere a due limiti distinti.

Proposizione in parte già nota per lo spazio metrico euclideo

Siano (X, d) uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $x \in X$.

1. $x \in Dr(E)$ se e solo se esiste una successione di elementi di $E \setminus \{x\}$ convergente a x.
2. $x \in \overline{E}$ se e solo se esiste una successione di elementi di E convergente a x.
3. E è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le successioni di elementi di E convergenti in (X, d). Esplicitare ...

Dimostrazione ... per esercizio

Osservazione (convergenza nei sottospazi)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $A \subset X$ e sia d^A la metrica indotta.

- Ogni successione di elementi di A che converge in (A, d^A) converge anche in (X, d) (al medesimo limite).
- Se una successione di elementi di A converge in (X, d), allora essa converge in (A, d^A) se e solo se il suo limite appartiene a A.
- Se A è chiuso in (X, d), allora una successione di elementi di A converge in (A, d^A) se e solo se converge in (X, d).

Successioni di Cauchy e spazi metrici completi

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia (x_n) una successione di elementi di X. Diciamo che (x_n) è una successione di Cauchy nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

cioè

$$\text{per ogni } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \text{ risulta } d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

Proposizione (proprietà delle successioni di Cauchy)

Sia (x_n) una successione di Cauchy nello spazio metrico (X, d). Allora:

1. (x_n) è limitata;
2. se esiste una successione estratta da (x_n) convergente a un certo x, anche (x_n) converge a x.

Dimostrazione . . .

Osservazione

In qualsiasi spazio metrico, ogni successione convergente è anche una successione di Cauchy. Motivazione ...

Il viceversa non è vero in generale. Esempio...

Se in uno spazio metrico tutte le successioni di Cauchy sono anche convergenti, diciamo che lo spazio metrico è completo.

Teorema (completezza dello spazio metrico euclideo)

1. $\mathbb{R}$ è completo rispetto alla metrica del valore assoluto.
2. Per $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ è completo rispetto alla metrica euclidea.

Dimostrazione ...

Commento sulle nozioni di "completezza di $\mathbb{R}$" viste in precedenza ...

Esercizio

Dato uno spazio metrico discreto:

- identificare le successioni convergenti e le successioni di Cauchy;
- dedurre che è uno spazio metrico completo.

Proposizione (chiusura e completezza)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $A \subset X$ e sia d^A la metrica indotta.

1. Se (A, d^A) è completo, allora A è chiuso in (X, d).
2. Se (X, d) è completo e A è chiuso in (X, d), allora:

   (A, d^A) è completo.

Dimostrazione ...

Nota: da 1 segue che $\mathbb{Q}$, munito della metrica del valore assoluto, non è uno spazio metrico completo.

Spazi metrici (sequenzialmente) compatti

Diciamo che uno spazio metrico (X, d) è (sequenzialmente) compatto se da ogni successione di elementi di X si può estrarre una sottosuccessione convergente in (X, d).

Sia $A \subset X$. Diciamo che A è un sottoinsieme compatto di X se il sottospazio metrico (A, d^A) è compatto. Esplicitare ...

Proposizione (compattezza, chiusura e limitatezza)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $A \subseteq X$.

1. Se A è compatto, allora A è limitato in (X, d).
2. Se A è compatto, allora il sottospazio metrico (A, d_A) è completo e quindi A è chiuso in (X, d).
3. Se (X, d) è compatto e A è chiuso in (X, d), allora A è compatto.

Dimostrazione ...

Osservazione

Da ❶ e ❷ della proposizione precedente segue che in qualsiasi spazio metrico (X, d) tutti i sottoinsiemi compatti sono chiusi e limitati.

Il viceversa è vero nello spazio metrico euclideo $\mathbb{R}^n$ (teorema di Heine-Borel, visto in AM II), ma non è vero in generale.

Esempio

Come già osservato, in uno spazio metrico discreto tutti gli insiemi sono sia chiusi che limitati; tuttavia, essi sono compatti se e solo se sono finiti.

Giustificare . . .

Un esempio più interessante verrà fornito più avanti.

Funzioni continue

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Sia $\bar{x} \in X$.

Diciamo che una funzione $f : X \to Y$ è continua in $\bar{x}$ se è soddisfatta una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti: $\leftarrow$ verificare per esercizio

(a) per ogni intorno V di $f(\bar{x})$ in (Y, d_Y) esiste un intorno U di $\bar{x}$ in (X, d_X) tale che $f(U) \subseteq V$;

(b) per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esiste $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tale che:
per ogni $x \in X$ con $d_X(x, \bar{x}) < \delta$ risulta $d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$;

(c) per ogni successione (x_n) convergente a $\bar{x}$ in (X, d_X), la successione trasformata $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$ in (Y, d_Y).
(assunta come definizione in AM II per funzioni tra spazi metrici euclidei)

Se $A \subseteq X$, diciamo che è f continua in A se è continua in ogni punto di A; diciamo che f è continua se è continua in X.

Esempio

Siano (X, d) uno spazio metrico e $\tilde{x} \in X$.

La funzione $x \in X \mapsto d(x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}$ è continua.

segue dalla seconda disuguaglianza triangolare

Pertanto:

se (x_n) converge a x in (X, d), risulta $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, \tilde{x}) = d(x, \tilde{x})$.

Nota

Anche per funzioni continue tra generici spazi metrici valgono il teorema di Weiestrass e il teorema di Cantor, che ci limitiamo a enunciare:

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \to Y$ funzione continua.

Se X è compatto, allora:

- $f(X)$ è compatto;
- f è uniformemente continua, cioè: per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esiste $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tale che per ogni $x, y \in X$ con $d_X(x, y) < \delta$ risulta $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Una classe di funzioni continue: contrazioni

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f : X \to X$.
Diciamo che f è una contrazione se esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

Ogni contrazione è anche una funzione continua; vale il viceversa? No!

Teorema (delle contrazioni o di Banach-Cacioppoli)
Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f : X \to X$ una contrazione.
Allora: esiste uno e un solo $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{punto fisso di } f}}{x} \in X$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione . . .

Nota
La dimostrazione fornisce un procedimento costruttivo per approssimare l'unico punto fisso della contrazione.

Alcuni spazi metrici di funzioni

Sia X un insieme qualsiasi e sia (Y, d_Y) uno spazio metrico.

Definiamo l'insieme

$$B(X, Y) := \Big\{ f : X \to Y \mid f \text{ è limitata} \Big\}$$

e la funzione $d_\infty : B(X, Y) \times B(X, Y) \to \mathbb{R}_+$ tale che

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y\big(f(x), g(x)\big) \qquad \text{per ogni } f, g \in B(X, Y).$$

Proposizione

1. La funzione d_∞ è ben posta.
2. La funzione d_∞ è una metrica (detta metrica dell'estremo superiore)
3. $(B(X, Y), d_\infty)$ è uno spazio metrico.

Verifica . . .

Interpretazione grafica di d_∞ per $X, Y \subseteq \mathbb{R}$? Intorni? Convergenza?

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Definiamo gli insiemi

$$C(X, Y) := \left\{ f : X \to Y \mid f \text{ è continua} \right\}$$

e

$$C_b(X, Y) := B(X, Y) \cap C(X, Y). \quad \subseteq B(X, Y)$$

Osservazioni

- Munito della metrica indotta da d_∞, che denotiamo con lo stesso simbolo, $C_b(X, Y)$ è un sottospazio metrico di $(B(X, Y), d_\infty)$.
- Se X è compatto, gli insiemi $C_b(X, Y)$ e $C(X, Y)$ coincidono.

  Per esempio, se $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$: $C_b([a, b], \mathbb{R}) = C([a, b], \mathbb{R})$.

Nota (da ricordare)

In $(C([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ la palla chiusa di centro la funzione costante di valore 0 e raggio 1 è un insieme chiuso e limitato ma non compatto.

Verifica . . .

Teorema (completezza di $B(X, Y)$)

Siano X un insieme e (Y, d_Y) è uno spazio metrico completo.

Allora:

$(B(X, Y), d_\infty)$ è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione . . .

Teorema (completezza di $C_b(X, Y)$)

Siano (X, d_X) uno spazio metrico e (Y, d_Y) uno spazio metrico completo.

Allora:

$(C_b(X, Y), d_\infty)$ è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione . . .

Particolari spazi metrici: spazi normati

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$).
Una norma in X è una funzione $N : X \to \mathbb{R}_+$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- **N1** $N(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
- **N2** $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\lambda \in \mathbb{C}$) e $x \in X$;
- **N3** $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ per ogni $x, y \in X$. disuguaglianza triangolare

Di solito si utilizza la notazione $\|x\|$ invece di $N(x)$; la coppia $(X, \|\cdot\|)$ si chiama spazio normato.

Esempi

$\mathbb{R}^n$ con la "norma euclidea", ma anche:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

per $n = 1$ coincidono tutte con il valore assoluto

Osservazione

Sia $\|\cdot\|$ una norma nello spazio vettoriale X. La funzione

$$(x, y) \in X \times X \mapsto \|x - y\| \in \mathbb{R}_+$$

è una metrica in X, detta metrica indotta dalla norma.

La verifica si basa esclusivamente sulle proprietà N1-N3; è identica a quella fatta per la metrica indotta in $\mathbb{R}^n$ dalla norma euclidea.

Pertanto: ogni spazio normato è anche uno spazio metrico.

Uno spazio normato che risulti completo rispetto alla metrica indotta dalla norma viene chiamato spazio di Banach.

Esempi

- $\mathbb{R}$ con valore assoluto
- $\mathbb{R}^n$ con una qualsiasi delle tre norme considerate

  norme "equivalenti" $\rightarrow$ metriche "equivalenti" $(\rightarrow$ stessa topologia$)$
  $\uparrow$ intorni sferici?

Spazi normati di funzioni

Sia X un insieme e sia Y uno spazio vettoriale.

Per $f, g : X \to Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definiamo

$$f + g := x \in X \mapsto f(x) + g(x) \in Y, \qquad \lambda f := x \in X \mapsto \lambda f(x) \in Y.$$

Munito di queste operazioni, l'insieme $F(X, Y)$ di tutte le funzioni definite in X e a valori in Y è uno spazio vettoriale.

Se su Y è assegnata una norma $\| \cdot \|_Y$, ha senso considerare l'insieme $B(X, Y)$, che è un sottospazio vettoriale di $F(X, Y)$. Cioè?

L'applicazione $\| \cdot \|_\infty : B(X, Y) \to \mathbb{R}_+$ definita ponendo

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y \qquad \text{per ogni } f \in B(X, Y)$$

è ben posta ed è una norma (detta norma dell'estremo superiore).

Dunque: $(B(X, Y), \| \cdot \|_\infty)$ è uno spazio normato.

Se, in aggiunta, su X è assegnata una metrica, ha senso considerare anche l'insieme $C_b(X, Y)$, che è un sottospazio vettoriale di $B(X, Y)$ dal quale "eredita" la norma $\| \cdot \|_\infty$.

Osservazione (che sembra uno scioglilingua!)
La metrica indotta in $B(X, Y)$ dalla norma dell'estremo superiore associata alla norma su Y coincide con la metrica dell'estremo superiore associata alla metrica su Y indotta dalla norma su Y.

Corollario (importante!)
Se $(Y, \| \cdot \|_Y)$ è uno spazio di Banach, anche gli spazi di funzioni $(B(X, Y), \| \cdot \|_\infty)$ e $(C_b(X, Y), \| \cdot \|_\infty)$ sono spazi di Banach.

Esempio
Lo spazio vettoriale $C([a, b], \mathbb{R})$ munito della norma dell'estremo superiore associata al valore assoluto è uno spazio di Banach.

APPENDICE

(VERIFICHE, RICHIAMI, ...)

Verifica della seconda disuguaglianza triangolare

Fisso x, y, z. Per la disuguaglianza triangolare:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y);$$

portando a primo membro:

$$d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y) \ (= d(y,z));$$

scambiando y e z:

$$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z);$$

moltiplicando per -1:

$$d(x,y) - d(x,z) \geq -d(y,z).$$

Mettendo insieme le disuguaglianze colorate:

$$-d(y,z) \leq d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z),$$

che equivale a

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z). \quad \square$$

Nozioni topologiche in uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Sia $\bar{x} \in X$.

Diciamo che $\bar{x}$ è

- punto interno a E se esiste un intorno sferico di $\bar{x}$ contenuto in E;
- punto esterno a E se è interno a E^c (complementare di E), cioè se esiste un intorno sferico di $\bar{x}$ contenuto in E^c;
- punto di frontiera per E se non è né interno né esterno a E, cioè se ogni intorno sferico di $\bar{x}$ contiene sia punti di E che punti di E^c;
- punto di accumulazione per E se ogni intorno di $\bar{x}$ contiene almeno un elemento di E <u>diverso da $\bar{x}$</u>. $\leftarrow$ Superfluo se $\bar{x} \notin E$.

Chiamiamo

- interiore o interno di E l'insieme dei punti interni a E, denotato con $\text{int}(E)$ (oppure $\mathring{E}$);
- frontiera di E l'insieme dei punti di frontiera per E, denotato con ∂E;
- derivato di E l'insieme dei punti di accumulazione per E, denotato con $D_r(E)$;
- chiusura di E l'insieme $E \cup Dr(E)$, o equivalentemente l'insieme $E \cup \partial E$, denotato con $\overline{E}$.
  ↑ verifica come in $\mathbb{R}^n$

Naturalmente valgono le medesime osservazioni fatte in $\mathbb{R}^n$.
Per esempio:

- E e il suo complementare E^c hanno la stessa frontiera;
- gli insiemi E, $Dr(E)$, ∂E non sono confrontabili per inclusione;
- $\text{int}(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}$.

Diciamo che E è un insieme aperto se è soddisfatta una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

(a) tutti gli elementi di E sono punti interni a E

(b) $\mathrm{int}(E) = E$

(c) $E \cap \partial E = \emptyset$

Diciamo che E è un insieme chiuso se è soddisfatta una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

(a) $D_r(E) \subseteq E$

(b) $\overline{E} = E$

(c) $\partial E \subseteq E$

Richiamo di AM II: insiemi limitati in $\mathbb{R}^n$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diciamo che E è limitato se

(a) esiste $M \in \mathbb{R}^*_+$ tale che $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq M$ per ogni $\boldsymbol{x} \in E$.

Tale proprietà equivale a

(b) esiste una palla (chiusa) di centro $\mathbf{0}$ che contiene E,

che a sua volta equivale a

(c) esiste una palla (chiusa) che contiene E.

(a), (b) e (c) hanno senso in un generico spazio metrico?

Richiamo di AM II: successioni convergenti in $\mathbb{R}^n$

Siano $(\boldsymbol{x}_k) \subset \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.

Per ogni $i \in \{1, \ldots n\}$, denotiamo con $x_{k,i}$ e x_i la i-esima componente di $\boldsymbol{x}_k$ e di $\boldsymbol{x}$, rispettivamente.

Diciamo che $(\boldsymbol{x}_k)$ converge a $\boldsymbol{x}$ se è soddisfatta una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

(a) ogni intorno (sferico) di $\boldsymbol{x}$ contiene $\boldsymbol{x}_k$ definitivamente

(b) $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n} = 0$

(c) per ogni $i \in \{1, \ldots n\}$, la successione di numeri reali $(x_{k,i})$ converge a x_i.

(a), (b) e (c) hanno senso in un generico spazio metrico?

Dimostrazione della completezza dello spazio metrico $(B(X, Y), d_\infty)$

Sia $(f_n) \subset B(X, Y)$ una successione di Cauchy rispetto alla metrica d_∞:

$$d_\infty(f_n, f_m) \to 0 \ \text{ per } n, m \to +\infty.$$

Devo dimostrare che (f_n) converge in $(B(X, Y), d_\infty)$, ossia che esiste una funzione $f : X \to Y$ tale che

1. f è limitata
2. per $n \to +\infty$: $\ d_\infty(f_n, f) \to 0 \quad (\text{cioè } \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0)$

Fisso un arbitrario $x \in X$.
Dalla definizione di d_∞ $(= \sup \dots\ )$ segue che per ogni n, m:

$$0 \leq d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m);$$

per TCO:

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \to 0 \ \text{ per } n, m \to +\infty.$$

Questo significa che la successione $(f_n(x))$ è di Cauchy in (Y, d_Y),
che è spazio metrico completo per ipotesi.
Pertanto: la successione $(f_n(x))$ converge nello spazio metrico (Y, d_Y).

Definisco la funzione $f : X \to Y$ ponendo per ogni $x \in X$

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x);$$

devo dimostrare che f soddisfa 1 e 2.

Preliminarmente, fisso $\varepsilon > 0$.

Siccome (f_n) è una successione di Cauchy rispetto alla metrica d_∞,
esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n, m \geq \nu$: $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$.

Quindi: per ogni $n, m \geq \nu$ e per ogni $x \in X$: $d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$.

Se fisso $n \geq \nu$ e $x \in X$, da quanto scritto qui sopra deduco:

$$\text{per ogni } m \geq \nu : \quad d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon. \qquad (*)$$

Adesso considero $m \to +\infty$:

- per definizione di f: $f_m(x) \to f(x)$
- per la continuità della funzione distanza dal punto fissato $f_n(x)$:

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \to d_Y(f_n(x), f(x))$$

- per $(*)$ e per il teorema di permanenza delle disuguaglianze:

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon.$$

Ricapitolando, ho provato che:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n \ge \nu$
e per ogni $x \in X$: $d_Y(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon$ $\quad (**)$

che equivale a:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n \ge \nu$: $\sup\limits_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon$

che equivale a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0$, cioè 2.

Mi resta da verificare 1.

Utilizzo nuovamente $(**)$:

in corrispondenza di $\varepsilon = 1$, scelgo un intero k tale che

$$\text{per ogni } x \in X : \; d_Y(f_k(x), f(x)) \leq 1.$$

Siccome f_k è limitata, esistono $\bar{y} \in Y$ e $r > 0$ tali che

$$\text{per ogni } x \in X : \; d_Y(f_k(x), \bar{y}) \leq r.$$

Dunque, per ogni $x \in X$:

$$d_Y(f(x), \bar{y}) \leq d_Y(f(x), f_k(x)) + d_Y(f_k(x), \bar{y}) \leq 1 + r.$$

Questo mostra che l'immagine $f(X)$ è contenuta nella palla chiusa di centro $\bar{y}$ e raggio $1 + r$, dunque f è una funzione limitata. □