

a.a. 2023/2024

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica III

Sistemi differenziali lineari

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online;
non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Sistemi differenziali lineari (solo qualche cenno)

Sia I un intervallo; per $i, j \in \{1, \dots, n\}$ siano $a_{ij}, b_i : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideriamo il **sistema di equazioni differenziali lineari di ordine 1**

$$(1) \quad \begin{cases} y_1' = a_{11}(t) y_1 + a_{12}(t) y_2 + \dots + a_{1n}(t) y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t) y_1 + a_{22}(t) y_2 + \dots + a_{2n}(t) y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t) y_1 + a_{n2}(t) y_2 + \dots + a_{nn}(t) y_n + b_n(t) \end{cases}$$

Per ogni $t \in I$, siano

$A(t)$: matrice quadrata $n \times n$ di componenti $a_{ij}(t)$

matrice dei
coefficienti

$B(t)$: vettore colonna a n righe di componenti $b_i(t)$

vettore dei
termini noti

Il sistema (1) si riscrive in forma vettoriale:

$$(2) \quad \mathbf{y}' = A(t) \mathbf{y} + B(t)$$

Per i sistemi lineari si utilizza la stessa terminologia delle equazioni differenziali lineari:

- sistema **omogeneo**, sistema **non omogeneo** o **completo**, sistema **omogeneo associato** a un sistema completo;
- sistema **a coefficienti costanti**;
- **integrale generale**, **integrale particolare**.

Vale il **principio di sovrapposizione**:

se φ_1 e φ_2 risolvono rispettivamente i sistemi

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + B_1(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + B_2(t),$$

allora per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ la funzione $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$ risolve il sistema

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \alpha_1 B_1(t) + \alpha_2 B_2(t).$$

Vale il **teorema di struttura dell'integrale generale**:

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per $i, j \in \{1, \dots, n\}$ siano $a_{ij}, b_i \in C(I, \mathbb{R})$.

Per ogni $t \in I$, sia $A(t)$ la matrice quadrata di componenti $a_{ij}(t)$ e sia $B(t)$ il vettore colonna di componenti $b_i(t)$.

Siano V e V_0 , rispettivamente, l'integrale generale del sistema (2) e del sistema omogeneo associato. Allora:

- (a) V e V_0 sono sottoinsiemi di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- (b) V_0 è un **sottospazio vettoriale** di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ di **dimensione n** .
- (c) Denotato con $\bar{\varphi}$ un **qualsiasi integrale particolare** del sistema non omogeneo, si ha $V = V_0 + \bar{\varphi}$.

Conseguenza di (b): determinare V_0 equivale a determinare **n soluzioni linearmente indipendenti** del sistema omogeneo associato, cioè un **sistema fondamentale di soluzioni**.

Sistemi differenziali lineari omogenei

Consideriamo il sistema differenziale lineare omogeneo

$$(*) \quad \mathbf{y}' = A(t) \mathbf{y}$$

con $A = A(t)$ matrice $n \times n$ di funzioni reali continue nell'intervallo I .

Come per le equazioni differenziali lineari, la lineare indipendenza di n soluzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ del sistema (*) si può stabilire utilizzando il determinante della **matrice wronskiana**, definita ponendo

$$W(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}, \text{ per ogni } t \in I.$$

Precisamente:

le soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo $\det(W(t)) \neq 0$ per un (e quindi ciascun) $t \in I$.

Come si determinano soluzioni di (*)? Nella prossima lezione daremo una risposta completa per sistemi a coefficienti costanti.

Sistemi differenziali lineari omogenei a coefficienti costanti

Consideriamo il sistema differenziale lineare omogeneo

$$(*) \quad \mathbf{y}' = A \mathbf{y}$$

con A matrice $n \times n$ di numeri reali.

L'integrale generale di $(*)$ è un sottoinsieme di $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

- Per $n = 1$, cioè per la singola equazione $y' = a y$, con $a \in \mathbb{R}$, l'integrale generale è

$$\{c e^{at} \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

- Per $n \geq 2$, l'integrale generale è

$$\{e^{tA} \mathbf{c} \mid \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\},$$

dove e^{tA} è la **matrice esponenziale**. ← ???

Matrice esponenziale

Denotiamo con M_n l'insieme delle matrici $n \times n$ di numeri reali.

- M_n è uno spazio vettoriale reale.
- Per ogni $A \in M_n$ definiamo

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2}.$$

Si tratta di una norma che rende M_n uno spazio di Banach.

Non è altro che \mathbb{R}^{n^2} con la norma euclidea

- Oltre alle tre proprietà che definiscono in generale una norma, è soddisfatta la proprietà submoltiplicativa:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \text{per ogni } A, B \in M_n.$$

Data $A \in M_n$, definiamo per ricorrenza la **matrice iterata** ponendo

$$A^0 := I_n, \quad A^k := A A^{k-1} \text{ per } k \geq 1$$

matrice identica \uparrow

Consideriamo nello spazio normato M_n la serie di termine $\frac{1}{k!} A^k$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| = \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k. \quad \leftarrow \text{serie esponenziale, convergente}$$

Per confronto, la serie di termine $\frac{1}{k!} A^k$ converge **normalmente** in M_n ,
pertanto **converge** in M_n . spazio di Banach \uparrow

La sua somma

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

si chiama **matrice esponenziale di A** .

Alcune proprietà della matrice esponenziale

- Se A è la matrice nulla, allora $e^A = I_n$. ← “ $e^0 = 1$ ”
- Se A e B commutano (cioè $AB = BA$), allora $e^{A+B} = e^A e^B$

Sia $A \in M_n$ una matrice (non nulla). Sia $t \in \mathbb{R}$.

Denotiamo con il simbolo e^{tA} la matrice esponenziale corrispondente alla matrice tA .

Se $t = 0$: $e^{tA} = I_n$.

Se $t \neq 0$?

Rispondiamo per $n = 2 \dots$

1 A matrice diagonale

(caso facile, ma poco utile...)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y \end{cases}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} t\lambda & 0 \\ 0 & t\mu \end{pmatrix}$$

$$({}^t A)^2 = \begin{pmatrix} t\lambda & 0 \\ 0 & t\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\lambda & 0 \\ 0 & t\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2\lambda^2 & 0 \\ 0 & t^2\mu^2 \end{pmatrix}$$

$$({}^t A)^3 = \begin{pmatrix} t\lambda & 0 \\ 0 & t\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2\lambda^2 & 0 \\ 0 & t^2\mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3\lambda^3 & 0 \\ 0 & t^3\mu^3 \end{pmatrix}$$

⋮

$$({}^t A)^k = \begin{pmatrix} t^k\lambda^k & 0 \\ 0 & t^k\mu^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= I_2 + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots + \frac{1}{k!}(tA)^k + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\lambda & 0 \\ 0 & t\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2\lambda^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t^2\mu^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^3\lambda^3}{3!} & 0 \\ 0 & \frac{t^3\mu^3}{3!} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \dots + \begin{pmatrix} \frac{t^k\lambda^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{t^k\mu^k}{k!} \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + t\lambda + \frac{t^2\lambda^2}{2} + \frac{t^3\lambda^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + t\mu + \frac{t^2\mu^2}{2} + \frac{t^3\mu^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quindi: la generica soluzione del sistema (disaccoppiato)

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y \end{cases}$$

è

$$e^{tA} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

cioè la funzione vettoriale di componenti

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t}, \quad y(t) = c_2 e^{\mu t}$$

Come avevamo
previsto!

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Nota:

$$\begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\mu t} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑
autovettore di λ

↑
autovettore di μ

- 2 A matrice diagonalizzabile in \mathbb{R}

$$A = S D S^{-1} \text{ con } D \text{ matrice diagonale} \\ S \text{ matrice invertibile} \quad \text{con elementi reali}$$

Alcuni richiami e osservazioni:

- sulla diagonale di D ci sono gli autovalori di A ;
(A e D sono *simili*, e due matrici simili hanno i medesimi autovalori)
- le colonne di S sono autovettori corrispondenti agli autovalori di A .
- calcolando le matrici iterate di A si riconosce che

$$e^{tA} = S e^{tD} S^{-1};$$

- per quanto visto nel caso 1:

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}$$

Quindi:

la generica soluzione del sistema è $e^{tA} \tilde{\mathbf{c}}$ con $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^2$, cioè

$$S e^{tD} S^{-1} \tilde{\mathbf{c}} = S e^{tD} \mathbf{c}$$

con $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

Esplicitiamo la soluzione. Siano $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, rispettivamente, autovettori corrispondenti a λ e μ .

Allora:

$$\begin{aligned} S e^{tD} \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 e^{t\lambda} & v_1 e^{t\mu} \\ u_2 e^{t\lambda} & v_2 e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 u_1 e^{t\lambda} + c_2 v_1 e^{t\mu} \\ c_1 u_2 e^{t\lambda} + c_2 v_2 e^{t\mu} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{u} + c_2 e^{\mu t} \mathbf{v} \end{aligned}$$

Osservazione

Se $A \in M_n$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- A è diagonalizzabile,
- A ha n autovettori linearmente indipendenti,
- per ciascun autovalore la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica (dimensione dell'autospazio corrispondente) sono uguali.

Sicuramente vero se gli autovalori sono tutti distinti.

Esempio

Consideriamo il sistema differenziale lineare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha autovalori distinti -1 e 2 con autovettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ rispettivamente.}$$



Infinite altre scelte sono possibili, ovviamente.

L'integrale generale del sistema è

$$c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ 4 c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3 A matrice diagonalizzabile in \mathbb{C}

- Se $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$) è autovalore della matrice A , anche il coniugato $\bar{\lambda}$ è autovalore.
- Se $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ è autovettore corrispondente a λ , allora $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ è autovettore corrispondente a $\bar{\lambda}$.
- Le funzioni $t \mapsto e^{\lambda t} \mathbf{w}$ e $t \mapsto e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{w}}$ sono l'una la coniugata dell'altra.
- Posto $\boldsymbol{\eta}(t) := e^{\lambda t} \mathbf{w}$:
 $\boldsymbol{\eta}$ e $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ risolvono il sistema differenziale avente A come matrice dei coefficienti, sono linearmente indipendenti, e hanno valori in \mathbb{C}^2 .
- Posto $\boldsymbol{\varphi} := \operatorname{Re}(\boldsymbol{\eta})$ e $\boldsymbol{\psi} := \operatorname{Im}(\boldsymbol{\eta})$:
 $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ risolvono lo stesso sistema, sono linearmente indipendenti, e hanno valori in \mathbb{R}^2 .

Come si determinano $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$?

Esempio

Consideriamo il sistema differenziale lineare $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

La matrice dei coefficienti ha autovalori complessi coniugati $2 \pm i$ con autovettori

$$\begin{pmatrix} 1 \pm i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determino la soluzione a valori complessi

$$\begin{aligned} \eta(t) &= e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos(t) + i \sin(t)) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \left[\left(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + i \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right] \end{aligned}$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria della soluzione a valori complessi determino due soluzioni a valori reali:

$$\varphi(t) = e^{2t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(t) - \sin(t)) \\ -2 e^{2t} \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\psi(t) = e^{2t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(t) + \sin(t)) \\ -2 e^{2t} \sin(t) \end{pmatrix}$$

4 A matrice non diagonalizzabile

Equivalentemente: la matrice A ha autovalori con molteplicità geometrica minore della molteplicità algebrica.

Per $n = 2$:

A ha un solo autovalore λ che ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. Non esistono due autovettori di A linearmente indipendenti, dunque gli autovettori di A non sono sufficienti a generare l'integrale generale (che ha dimensione 2).

Si ricorre al **teorema di Jordan**:

Ogni matrice reale (o complessa) è simile su \mathbb{C} a una matrice J in **forma canonica di Jordan**.

$$\text{Per } n = 2: \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Essendo $A = S J S^{-1}$, come nel caso diagonalizzabile si riconosce che l'integrale generale è $S e^{tJ} \mathbf{c}$, con $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. $S ? e^{tJ} ?$

Determino e^{tJ} :

$$\bullet J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + B \quad \text{con } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet e^{tB} = I_2 + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet e^{tJ} = e^{t\lambda} I_2 e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determino S :

- $S_1 := S \mathbf{e}_1$ (prima colonna), $S_2 := S \mathbf{e}_2$ (seconda colonna)

- $AS = SJ \implies AS_1 = S J \mathbf{e}_1 = S \lambda \mathbf{e}_1 = \lambda S_1,$

$$\iff (A - \lambda I_2) S_1 = 0, \text{ quindi:}$$

la prima colonna di S è autovettore di A corrispondente a λ

- $AS = SJ \implies AS_2 = S J \mathbf{e}_2 = S [\mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2] = S_1 + \lambda S_2$

$$\iff (A - \lambda I_2) S_2 = S_1, \text{ quindi:}$$

la seconda colonna di S è autovettore generalizzato corrispondente a λ

L'integrale generale è

$$\begin{aligned} S e^{tJ} \mathbf{c} &= S e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} (S_1 \quad t S_1 + S_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda t} S_1 + c_2 e^{\lambda t} (t S_1 + S_2), \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esempio

Consideriamo il sistema differenziale lineare $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

La matrice dei coefficienti ha autovalore $\lambda = 2$ con autovettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
e autovettore generalizzato $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è

$$c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -t + 1 \\ t \end{pmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Rappresentazione delle soluzioni, classificazione dell'equilibrio ...