

a.a. 2023/2024

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica III

Equazioni differenziali

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online;
non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Terminologia

Una **equazione differenziale** è una equazione in cui **la incognita è una funzione**; l'equazione viene espressa attraverso una relazione tra le variabili indipendenti, la funzione incognita e le sue derivate fino a un certo ordine.

Una equazione differenziale si dice

- **ordinaria** se la funzione incognita è funzione di **una variabile reale**,
- **alle derivate parziali** se la funzione incognita è funzione di **più variabili reali** e la relazione coinvolge le derivate parziali rispetto a due o più variabili.

Il **più alto ordine di derivazione** che compare nella relazione si chiama **ordine della equazione differenziale**.

In questo corso ci dedicheremo esclusivamente a **equazioni differenziali ordinarie**, che talvolta indicheremo per brevità con l'acronimo **EDO**.

In tutto il capitolo, n è un intero naturale diverso da 0.

Una equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma generale si scrive come

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

dove F è una funzione reale definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+2} .

Convenzione: il primo argomento di F è riservato alla variabile indipendente, che denoteremo solitamente con t ; il secondo ai valori della funzione incognita; il terzo ai valori della derivata prima, fino all'ultimo che è riservato ai valori della derivata n -esima della funzione incognita.

Assegnare una EDO di ordine n in forma generale vuole dire **assegnare una funzione reale di $n+2$ variabili reali**.

Esempi

Scrivere le EDO in forma generale corrispondenti alle funzioni

- $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(t, x_1, x_2) = t^3 - x_1 + \cos(x_2)$
- $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$

Data $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$, **risolvere** l'EDO di ordine n in forma generale corrispondente a F vuole dire **determinare una coppia** (φ, I) tale che

- I è un **intervallo**;
- $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile n volte in I ;
- per ogni $t \in I$: $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) \in \Omega$; ← **superfluo se**
 $\Omega = I \times \mathbb{R}^{n+1}$
- per ogni $t \in I$: $F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$.

Esempio

La coppia (\sin, \mathbb{R}) è soluzione dell'equazione differenziale

$$y^2 + (y')^2 - 1 = 0.$$

Ci sono altre soluzioni?

Proprietà generale delle equazioni autonome ...

Osservazione

L'intervallo è parte della soluzione e pertanto deve essere specificato.

Per esempio: la coppia $(\sin,]0, \pi[)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$y|y| + (y')^2 - 1 = 0$, mentre la coppia $(\sin,]-\pi, 0[)$ non lo è.

Equazioni differenziali in forma normale

In genere, non è possibile risolvere **esplicitamente** una EDO; si cerca almeno di stabilire se esistono soluzioni, quante sono, e quali proprietà hanno.

Per equazioni in forma generale, già il primo di questi obiettivi è difficile da raggiungere; esiste invece una teoria ben sviluppata per le equazioni differenziali **in forma normale**, cioè equazioni differenziali che si possono scrivere come

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

con f funzione reale definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} .

Convenzione . . .

Quindi: una EDO è in forma normale se **la derivata di ordine massimo della funzione incognita è espressa in termini della variabile indipendente, la funzione incognita e le sue derivate di ordine inferiore.**

Esempi

Scrivere l'EDO in forma normale corrispondente alle seguenti funzioni.

- 1 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(t, x) = t(1 - x^2)$
- 2 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(t, x_1, x_2) = t(1 - x_1^2)$
- 3 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(t, x_1, x_2) = t(1 - x_2^2)$

Osservazione

Ogni EDO in forma normale può essere scritta in forma generale.

Precisamente: l'EDO di ordine n in forma normale associata alla funzione

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ si scrive come EDO di ordine n in forma generale

associata alla funzione $F : \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$F(t, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(t, x_1, \dots, x_n).$$

Vale il viceversa?

Esempi

Stabilire se le seguenti EDO si possono scrivere in forma normale; in caso affermativo, identificare la funzione corrispondente.

① $y'' - \sin(t y') + t^3 y = 0$

② $y''' + \ln(t) y' - t \arcsin(y'') = 0$

③ $t^2 y'' + t y' + y^3 + e^t = 0$

④ $(y')^2 - \sin(t) + e^y = 0$

Osservazione  trattate in AM II

Le EDO **lineari** possono essere scritte in forma normale:

l'equazione $y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t)$,

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, si riscrive come

$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, con $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(t, x_1, \dots, x_n) = b(t) - a_0(t) x_1 - \dots - a_{n-1}(t) x_n.$$

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$.

Associando all'equazione differenziale

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

le n condizioni iniziali

$$y(t_0) = x_1^0, \quad y'(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_n^0,$$

si ottiene il problema di Cauchy di valori iniziali t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 .

Esplicitare la nozione di soluzione ...

Esempio 1 (un problema di Cauchy senza soluzioni)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq x_0 \\ 0 & \text{se } x > x_0 \end{cases}$

Il problema di Cauchy

$$y' = h(y), \quad y(0) = x_0$$

non ha alcuna soluzione definita in un intorno destro di 0.

Comportamento di h in x_0 ?

Esempio 2 (un problema di Cauchy con molteplici soluzioni)

Il problema di Cauchy

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

ha (almeno) due soluzioni. Comportamento di $x \mapsto x^{2/3}$ in $x = 0$?

Eliminando le “patologie” della funzione a secondo membro, si può garantire che un problema di Cauchy abbia una e una sola soluzione? Tra poco ...

Equazioni differenziali vettoriali di ordine 1

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. $:= (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$

Sia $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ ($:= \mathbf{f}(t, x_1, \dots, x_n)$). Sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$.

Consideriamo il problema di Cauchy vettoriale

$$(1) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Esplicitiamo la nozione di soluzione:

risolvere (1) vuole dire determinare una coppia (φ, I) tale che

- I è un intervallo contenente t_0 ;
- $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione derivabile in I ; ← ?
- per ogni $t \in I$: $(t, \varphi(t)) \in \Omega$; ← ?
- per ogni $t \in I$: $\varphi'(t) = \mathbf{f}(t, \varphi(t))$ ← ?
- $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Osservazione

Se denotiamo con f_1, f_2, \dots, f_n le componenti della funzione vettoriale \mathbf{f} , l'equazione vettoriale in (1) si può riscrivere come **sistema di n equazioni differenziali**

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n); \end{cases}$$

la condizione iniziale in (1) equivale alle n condizioni iniziali

$$y_1(t_0) = x_1^0, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = x_n^0.$$

Osservazione (equivalenza tra equaz. di ordine n e equaz. vettoriali di ordine 1)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$.

Se φ è soluzione, definita in un intervallo I , del problema di Cauchy

$$(2) \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = x_1^0, \quad y'(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases}$$

allora la funzione vettoriale di componenti $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}$ è soluzione, definita nel medesimo intervallo, del problema di Cauchy

$$(3) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

dove $\mathbf{x}_0 := (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è la funzione di componenti

$$f_1(t, x_1, \dots, x_n) = x_2, \quad f_2(t, x_1, \dots, x_n) = x_3, \quad \dots$$

$$f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) = x_n, \quad f_n(t, x_1, \dots, x_n) = f(t, y_1, \dots, y_n).$$

Viceversa: se φ è soluzione di (3) definita in un intervallo I , allora la prima componente di φ è soluzione di (2) definita nel medesimo intervallo.

Nota

Per l'osservazione precedente, ogni EDO in forma normale di ordine n è equivalente a una opportuna EDO vettoriale in forma normale di ordine 1, e lo stesso vale per i corrispondenti problemi di Cauchy.

Analogamente, qualsiasi sistema di equazioni differenziali in forma normale è equivalente a un opportuno sistema di m equazioni differenziali in forma normale di ordine 1 (dove m dipende dal numero di funzioni incognite nel sistema iniziale e dall'ordine di ciascuna equazione del sistema) e quindi a una equazione differenziale vettoriale di ordine 1. **Esempio ...**

Nello studio della teoria possiamo quindi limitarci a considerare equazioni differenziali vettoriali in forma normale di ordine 1.

Proposizione (regolarità delle soluzioni)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

per semplificare la scrittura
da qui in poi omettiamo il
grassetto nel caso vettoriale

Consideriamo l'equazione differenziale

$$(*) \quad y' = f(t, y).$$

- Se f è continua in Ω , allora ogni soluzione di $(*)$ è di classe C^1 nel proprio intervallo di definizione.
- Sia $k \in \mathbb{N}^*$. Se f è di classe C^k in Ω , allora ogni soluzione di $(*)$ è di classe C^{k+1} nel proprio intervallo di definizione.
- Se f è di classe C^∞ in Ω , allora ogni soluzione di $(*)$ è di classe C^∞ nel proprio intervallo di definizione.

ipotesi su Ω ?

Verifica ...

Esistenza e unicità locale

Siano $n, m \in \mathbb{N}^*$. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = f(t, x)$.

Diciamo che f è **lipschitziana in Ω rispetto a x uniformemente in t** se esiste $L \in \mathbb{R}_+^*$ tale che

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\mathbb{R}^m} \leq L \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{per ogni } (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

\uparrow **norma euclidea** \uparrow L : costante di Lipschitz

Osservazione

Sia $m \geq 2$ e siano f_1, \dots, f_m le componenti di f .

- Se f è lipschitziana rispetto a x uniformemente in t con costante di Lipschitz L , allora lo è anche ciascuna f_i , con la stessa costante di Lipschitz.
- Viceversa: se ciascuna f_i è lipschitziana rispetto a x uniformemente in t , con costante di Lipschitz L_i , allora lo è anche f , con costante di Lipschitz $L_1 + \dots + L_m$.

Diciamo che f è **localmente lipschitziana** in Ω rispetto a x uniformemente in t se f è **lipschitziana** rispetto a x uniformemente in t in **qualsiasi sottoinsieme di Ω del tipo**

$$\Gamma := [\alpha, \beta] \times \overline{B}_r(\bar{x}) \leftarrow \text{palla chiusa in } \mathbb{R}^n$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Γ rettangolo se $n = 1$
cilindro se $n = 2, \dots$

Proposizione (**condizioni sufficienti per la locale lipschitzianità**)

Con le notazioni precedentemente introdotte:

- 1 se per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ la derivata parziale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ è **continua** in Ω , allora f è localmente lipschitziana in Ω rispetto a x uniformemente in t .
- 2 se f è di classe C^1 in Ω , allora f è localmente lipschitziana in Ω rispetto a x uniformemente in t .

Dimostrazione ...

Condizioni anche necessarie? No!

Teorema (di esistenza e unicità locale) ← TEUL

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Supponiamo che esistano $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tali che

- l'insieme $\Gamma := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$ sia contenuto in Ω ,
- f sia lipschitziana in Γ rispetto a x uniformemente in t .

Poniamo $M := \max_{(t,x) \in \Gamma} \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n}$ e $\delta := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

se $M = 0$
va inteso
come $\delta := a$

Allora:

il problema di Cauchy

$$(P) \quad y' = f(t, y), \quad y(t_0) = x_0$$

ha una soluzione φ definita in $I_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Tale soluzione è unica nel senso che se una funzione ψ risolve (P) in un intervallo che contiene I_δ , la restrizione di ψ a I_δ coincide con φ .

Dimostrazione . . .

Osservazione

Se nelle ipotesi del TEUL l'insieme Γ si sostituisce con

$$\Gamma_+ := [t_0, t_0+a] \times \overline{B}_b(x_0)$$

e si definiscono

$$M_+ := \max_{(t,x) \in \Gamma_+} \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{e} \quad \delta_+ := \min \left\{ a, \frac{b}{M_+} \right\},$$

allora è garantita l'esistenza di un'unica soluzione di (P) in $[t_0, t_0+\delta_+]$.

Analogamente, se l'insieme Γ si sostituisce con

$$\Gamma_- := [t_0-a, t_0] \times \overline{B}_b(x_0)$$

e si definiscono

$$M_- := \max_{(t,x) \in \Gamma_-} \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{e} \quad \delta_- := \min \left\{ a, \frac{b}{M_-} \right\},$$

allora è garantita l'esistenza di un'unica soluzione di (P) in $[t_0-\delta_-, t_0]$.

Osservazione (approssimazioni successive)

Ripensando alla dimostrazione del teorema delle contrazioni si deduce che, con le notazioni della dimostrazione del TEUL, la successione definita per ricorrenza ponendo

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \quad \varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \quad \forall t \in I_\delta$$

converge **uniformemente** in I_δ all'unica soluzione del problema di Cauchy.

Esempi

Risolvere per approssimazioni successive i problemi di Cauchy

- $y' = y, \quad y(0) = 1$

↑
soluzioni già note!

- $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Corollari del TEUL

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- ① Sia f **continua** in Ω e **localmente lipschitziana** in Ω rispetto a x uniformemente in t .

Allora:

per ogni (t_0, x_0) punto **interno** a Ω il problema di Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = x_0$$

ha un'unica soluzione φ definita in un intorno di t_0 .

- ② Sia Ω un insieme **aperto** e sia f di **classe C^1** in Ω .

Allora:

per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$ il problema di Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = x_0$$

ha un'unica soluzione φ definita in un intorno di t_0 .

Osservazione (sulle ipotesi del TEUL e i suoi corollari)

- Se f non è continua in Ω , non è detto che tutti i problemi di Cauchy associati all'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ abbiano soluzione (vedere Esempio 1).
- Se f è continua in Ω ma non localmente lipschitziana in Ω rispetto a x uniformemente in t , tutti i problemi di Cauchy associati all'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ hanno soluzione (teorema di Peano), ma non è detto che la soluzione sia unica (vedere Esempio 2).

Cominciamo a mettere in pratica la teoria ...

Equazioni differenziali a variabili separabili

Equazioni differenziali di ordine 1 in forma normale del tipo

$$y' = g(t) h(y) =: f(t, y)$$

- $\text{dom}(f) = \text{dom}(g) \times \text{dom}(h)$ condizione sufficiente, non necessaria
- g continua, h di classe $C^1 \implies$ TEUL applicabile (nei punti interni)
- Soluzioni costanti (**di equilibrio**): $\varphi(t) \equiv \bar{y}$, con $h(\bar{y}) = 0$
- Ricerca di soluzioni non costanti:
 - 1 determino H primitiva di $\frac{1}{h}$, G primitiva di g ;
 - 2 determino H^{-1} inversa funzionale di H ;
 - 3 ottengo famiglia di soluzioni: $\varphi_c(t) = H^{-1}(G(t) + c)$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, con intervalli di definizione determinati dalle restrizioni imposte nei passi 1 e 2.

Nota: non sempre le soluzioni si possono determinare **esplicitamente**. 21

Esempi

- $y' = y(1 - y)$ equazione logistica

- $y' = \frac{y(1 - y)}{t^2 + 1}$

- $y' = \frac{3t^2 - 4t + 3}{2(y - 1)}$

- $y' = 2t \sqrt{(1 - y)^3}$

- $y' = 2t \sqrt{1 - y}$ ← vedere osservazione alla pagina seguente

- $y' = t \frac{9 - y^2}{y^2 + 1}$

- $y' = -\frac{y^2}{t(y + 1)}$ ← soluzioni implicite

Osservazione (soluzioni ottenute “incollando” soluzioni)

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalli adiacenti, con $\sup I = \inf J =: \alpha$.

Siano (φ, I) e (ψ, J) soluzioni dell'equazione differenziale

$$(*) \quad y' = f(t, y)$$

con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Se

- esistono $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \psi(t) =: \beta$,
- $(\alpha, \beta) \in \Omega$,

allora: la funzione $\eta : I \cup J \cup \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita ponendo

$$\begin{cases} \varphi(t) & t \in I \setminus \{\alpha\} \\ \beta & t = \alpha \\ \psi(t) & t \in J \setminus \{\alpha\} \end{cases}$$

è soluzione di (*). *Verifica ...*

Prolungamenti e soluzioni massimali

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sia $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$.

Diciamo che la funzione $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un **prolungamento** di φ se

- ψ è soluzione della stessa equazione differenziale,
- $I \subset J$,
- per ogni $t \in I$: $\psi(t) = \varphi(t)$.

Diciamo che una soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ è **massimale** se non ammette alcun prolungamento.

Proposizione (condizione sufficiente per la prolungabilità “a destra”)

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua in Ω e localmente lipschitziana in Ω rispetto a x uniformemente in t .

Sia φ una soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ definita in un intervallo I .

Posto $\tau := \sup I$, supponiamo:

- $\tau \in \mathbb{R}$,
- esiste $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \varphi(t) =: \xi \in \mathbb{R}^n$ e $(\tau, \xi) \in \text{int}(\Omega)$. ← se $\tau \in I$:
 $(\tau, \varphi(\tau)) \in \text{int}(\Omega)$

Allora:

esiste $T > \tau$ tale che φ ammette un prolungamento definito in $I \cup [\tau, T]$.

Verifica ...

Nota: per la prolungabilità “a sinistra” vale analogo risultato.

Corollario

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua in Ω e localmente lipschitziana in Ω rispetto a x uniformemente in t .

Sia φ una soluzione **massimale** della equazione differenziale $y' = f(t, y)$ e sia τ un estremo del suo intervallo di esistenza.

Se $\tau \in \mathbb{R}$, si verifica uno e uno solo dei seguenti casi (in cui i limiti vanno intesi unilateralmente):

- (a) esiste $\lim_{t \rightarrow \tau} \varphi(t) = \xi \in \mathbb{R}^n$ ma $(\tau, \xi) \in \partial\Omega$;
- (b) esiste $\lim_{t \rightarrow \tau} \varphi(t)$ ma **almeno una componente diverge**;
- (c) φ **non ha limite** per t che tende a τ .

Interpretazione di (a), (b), (c) ...

Osservazione

Se in corrispondenza di uno degli estremi dell'intervallo massimale di esistenza di φ non può verificarsi nessuno dei casi (a),(b),(c), allora necessariamente tale estremo è infinito.

Ciò permette in certi casi di stabilire *a priori* che una soluzione massimale è definita in un intervallo illimitato.

Riesaminare gli esempi di pagina 22 ...

Teorema (esistenza del prolungamento massimale)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua in Ω e localmente lipschitziana in Ω rispetto a x uniformemente in t .

Consideriamo l'equazione differenziale

$$(*) \quad y' = f(t, y).$$

- 1 Se due soluzioni di (*) hanno intervalli di definizione non disgiunti e coincidono in un punto, allora esse coincidono in tutti i punti della intersezione dei rispettivi intervalli di definizione.

“Unicità globale in ipotesi di esistenza e unicità locale”

- 2 Ogni soluzione di (*) ammette un unico prolungamento massimale.

Dimostrazione . . .

Intermezzo: applicazioni delle equazioni a variabili separabili

1 Sviluppo in serie di Taylor della funzione binomiale

Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Definiamo la **funzione binomiale** ponendo

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad \text{per ogni } x \in]-1, +\infty[.$$

Allora:

f è sviluppabile in serie di Taylor in $x_0 = 0$ con raggio di convergenza $R = 1$.

Verifica ...

2 Equazioni differenziali di Manfredi (o omogenee)

Sono equazioni differenziali di ordine 1 in forma normale del tipo

$$y' = g\left(\frac{y}{t}\right)$$

con g funzione reale di una variabile reale.

Sono **riducibili a equazioni a variabili separabili** mediante la sostituzione $z := \frac{y}{t}$.

Esempi

- $y' = \frac{t^3 + y^3}{t y^2}$
- $y' = \frac{y}{t} \ln\left(\frac{y}{t}\right)$

Esistenza e unicità globale

Sia I un intervallo e sia $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Diciamo che f è **sublineare** in $I \times \mathbb{R}^n$ se per ogni **intervallo compatto** $K \subseteq I$ esistono $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tali che

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq p + q \|x\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{per ogni } (t, x) \in K \times \mathbb{R}^n.$$

Osservazione (**condizioni sufficienti per la sublinearità**)

Con le notazioni della definizione:

- se per ogni **intervallo compatto** $K \subseteq I$ la restrizione di f a $K \times \mathbb{R}^n$ è **limitata**, allora f è sublineare;
- se f è continua e **lipschitziana** rispetto a x uniformemente in t , allora è sublineare. ↑ non solo localmente

Esempi ...

Osservazione (sublinearità e limiti)

Con le notazioni della definizione, se esiste $t \in I$ tale che

$$\frac{\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} \rightarrow +\infty \text{ per } \|x\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow +\infty,$$

allora f non è sublineare.

Esempi ...

Teorema (di **esistenza e unicità globale**) ← TEUG

Sia I un intervallo e sia $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supponiamo:

- f continua in $I \times \mathbb{R}^n$; ↑ “dominio di tipo striscia”
- f localmente lipschitziana in $I \times \mathbb{R}^n$ rispetto a x uniformemente in t ;
- f **sublineare** in $I \times \mathbb{R}^n$.

Allora: per ogni $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = x_0$$

ha una e una sola soluzione **globale**, cioè definita in I .

Dimostrazione ...

Osservazione

Nelle ipotesi del teorema, **tutte le soluzioni massimali** dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ **sono globali**.

Esempi

Determinare *a priori* l'insieme di definizione di tutte le soluzioni massimali delle seguenti equazioni differenziali:

- $y' = t \frac{9 - y^2}{y^2 + 1}$

- $y' = \arcsin(t) |y - 1|$

- $y' = \frac{y^3}{(t^2 + 1)(y^2 + 1)}$

- $y' = \frac{y^3}{t(y^2 + 1)}$

Dipendenza continua dai dati (solo un cenno)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Omega$. Siano date:

- $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$ tale che $t_k \rightarrow \bar{t}$;
- $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ tale che $x_k \rightarrow \bar{x}$;
- $\{f_k\} \subset C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che
 - $f_k \rightarrow f$ uniformemente nei sottoinsiemi compatti di Ω ,
 - per ogni insieme compatto $\Omega_0 \subseteq \Omega$ esiste $L \in \mathbb{R}_+^*$ tale che ciascuna funzione f_k sia lipschitziana rispetto a x uniformemente in t in Ω_0 con costante di Lipschitz L . (Nota: anche f lo è.)

Siano (φ, I) e (φ_k, I_k) , rispettivamente, le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy

$$(\bar{P}) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(\bar{t}) = \bar{x} \end{cases}$$

$$(P_k) \quad \begin{cases} y' = f_k(t, y) \\ y(t_k) = x_k. \end{cases}$$

Sia $[a, b] \subseteq I$ con $\bar{t} \in]a, b[$. Allora:

- 1 $[a, b] \subseteq I_k$ definitivamente;
- 2 esiste un sottoinsieme compatto di Ω che contiene il grafico di $\varphi|_{[a,b]}$ e definitivamente il grafico di $\varphi_k|_{[a,b]}$;
- 3 la successione $\{\varphi_k\}$ converge a φ uniformemente in $[a, b]$.

Significato ...

Nota: in intervalli illimitati non è garantito che ci sia convergenza uniforme. Esempio ...

Equazioni differenziali di Bernoulli

Equazioni differenziali di ordine 1 in forma normale del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha =: f(t, y)$$

con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- Il dominio di f dipende dall'insieme di definizione delle funzioni a e b e dall'esponente α .
- Se a e b sono continue in un intervallo I , il TEUL è applicabile in $\text{dom}(f)$ se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, in $\text{dom}(f) \setminus \{(t, 0) \mid t \in I\}$ se $\alpha \in]0, 1[$.
- La funzione costante di valore 0 (o sue eventuali restrizioni) è soluzione se e solo se $\alpha > 0$.
- Mediante la sostituzione $z := y^{1-\alpha}$ l'equazione è riconducibile a una equazione lineare.

Esempi

- $y' = \frac{2}{3}y - \frac{4}{9}\frac{t}{y^2}$
- $y' = 3y - 2ty^{1/3}$
- $y' = -2y + \frac{4}{3}ty^2$
- $y' = t(y^3 - y)$
- $y' = ty + \frac{t^3}{y}$
- $y' = -\frac{6}{t}y - 2t^2y^{3/2}$

Risultati teorici per equazioni differenziali di ordine n

Sia $n \geq 2$ e sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ la funzione vettoriale di componenti

$$f_1(t, x_1, \dots, x_n) = x_2$$

$$f_2(t, x_1, \dots, x_n) = x_3$$

\vdots

$$f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) = x_n$$

$$f_n(t, x_1, \dots, x_n) = f(t, x_1, \dots, x_n).$$

ripristiniamo
il grassetto nel
caso vettoriale

Le funzioni f_1, \dots, f_{n-1} sono **proiezioni**, pertanto sono definite in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, dove sono di classe C^∞ , lipschitziane rispetto a \mathbf{x} uniformemente in t (con costante di Lipschitz 1), lineari.

Pertanto: \mathbf{f} è continua / di classe C^k / localmente lipschitziana rispetto a \mathbf{x} uniformemente in t / sublineare **se e solo se** lo è f .



modifica nella definizione di sublinearità ... 39

Siano ora $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ e $\mathbf{x}_0 := (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Ricordiamo che i problemi di Cauchy

$$(PS) \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = x_1^0, \quad y'(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

$$(PV) \quad \begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) & \leftarrow \text{legata a } f \text{ come nella pagina precedente} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

sono **equivalenti**, nel senso che

- se φ risolve (PS) nell'intervallo I, allora $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ risolve (PV) nel medesimo intervallo;
- se φ risolve (PV) nell'intervallo I, allora la prima componente di φ risolve (PS) nel medesimo intervallo.

Quindi: possiamo dedurre risultati su (PS) a partire dai corrispondenti risultati su (PV).

1 Regolarità delle soluzioni

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$. Se $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$, allora ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

è di classe C^{k+n} nel proprio intervallo di definizione.

Se f è di classe C^∞ in Ω , allora ciascuna soluzione è di classe C^∞ nel proprio intervallo di definizione.

2 Esistenza e unicità locale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua in Ω e localmente lipschitziana in Ω rispetto a x uniformemente in t .

Allora:

per ogni $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ punto interno a Ω il problema di Cauchy (PS) ha un'unica soluzione φ definita in un intorno di t_0 .

3 Esistenza e unicità globale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$.

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **continua** in Ω , **localmente lipschitziana** in Ω rispetto a x uniformemente in t , e **sublineare** in Ω .

Allora:

per ogni $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ il problema di Cauchy (PS) ha un'unica soluzione φ definita in I .

Interpretazione grafica della unicità globale in ipotesi di EUL per $n = 2 \dots$

Possiamo finalmente giustificare quanto affermato nel corso di Analisi II sulle equazioni differenziali lineari:

Teorema ← il “teoremone”!

Sia I un intervallo e siano $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in C(I, \mathbb{R})$.

Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t).$$

Globalità e regolarità delle soluzioni

Ogni soluzione di $(*)$ è **definita in I** , dove risulta **di classe C^n** .

Esistenza e unicità globale

Per ogni $t_0 \in I$ e per ogni $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ il **problema di Cauchy di valori iniziali t_0, x_1, \dots, x_n** ammette un'**unica soluzione**, cioè: esiste una e una sola soluzione φ di $(*)$ tale che

$$\varphi(t_0) = x_1, \quad \varphi'(t_0) = x_2, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_n.$$

Verifica ...