

a.a. 2023/2024

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica III

Successioni e serie di funzioni

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online;  
non è quindi necessario copiarne il contenuto.

## Considerazione introduttiva

Siano  $X$  un insieme qualsiasi e  $(Y, d_Y)$  uno spazio metrico.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$ . Sia  $f : X \rightarrow Y$ .

Dire che la successione  $\{f_n\}$  converge a  $f$  nello spazio funzionale  $(B(X, Y), d_\infty)$  significa dire tre cose:

- 1 per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , la funzione  $f_n$  è limitata;
- 2 la funzione  $f$  è limitata;
- 3  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ .

Esplicitiamo 3:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0 \quad (*)$$

Notiamo che la relazione in  $(*)$  ha senso, e può essere soddisfatta, anche se le funzioni  $f_n$  e  $f$  non sono limitate. Esempio ...

Questa considerazione ci conduce alle definizioni che seguono.

Sia  $X$  un insieme qualsiasi e sia  $(Y, d_Y)$  uno spazio metrico.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$ . Sia  $f : X \rightarrow Y$ .

Diciamo che la successione  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  in  $X$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Diciamo che la successione  $\{f_n\}$  converge puntualmente a  $f$  in  $X$  se

$$\text{per ogni } x \in X: \lim_{n \rightarrow +\infty} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0.$$

### Osservazione

Se  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  in  $X$ , allora converge puntualmente; il viceversa non è vero. Esempio ...

### Nota

Si parla di convergenza uniforme e puntuale in  $X$ , ma a convergere sono successioni di numeri reali e di elementi di  $Y$ , rispettivamente.

La funzione  $f$  che compare nelle due precedenti definizioni si chiama, rispettivamente, **funzione limite uniforme** e **funzione limite puntuale** della successione  $\{f_n\}$ .

Esplicitiamo le nozioni di convergenza puntuale e uniforme “con  $\varepsilon$  e  $\nu$ ”:

- la successione  $\{f_n\}$  converge **puntualmente** a  $f$  in  $X$  se e solo se

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu: d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon;$$

↑ dipende da  $x$  e da  $\varepsilon$

- la successione  $\{f_n\}$  converge **uniformemente** a  $f$  in  $X$  se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu: d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

↑ dipende solo da  $\varepsilon$

### Esempio

Esplicitare la convergenza “con  $\varepsilon$  e  $\nu$ ” per la successione  $\{x^n\}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Dedurre che  $\{x^n\}$  converge uniformemente in  $[0, a]$ , per ogni  $a \in ]0, 1[$ .

Osservazione (convergenza uniforme e unione insiemistica)

Supponiamo che  $\{f_n\}$  converga uniformemente a  $f$  negli insiemi  $X_1, \dots, X_k$ .

Fissato  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , per ogni  $j \in \{1, \dots, k\}$  esiste  $\nu_j \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \nu_j$ :

$$(D_j) \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X_j.$$

Per ogni  $n \geq \nu := \max\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ , ciascuna  $(D_j)$  è soddisfatta, quindi:

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in \bigcup_{j=1}^k X_j.$$

Quindi:  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  nell'unione  $X_1 \cup \dots \cup X_k$ .

Questa proprietà **non** vale per unioni infinite.

Esempio:  $\{x^n\}$  converge uniformemente in  $\left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$  per qualsiasi

$k \in \mathbb{N}^*$ , ma non converge uniformemente in  $\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right] = [0, 1[$ .

## Convergenza uniforme, limitatezza e continuità

### Proposizione (convergenza uniforme e limitatezza)

Sia  $X$  un insieme e sia  $(Y, d_Y)$  uno spazio metrico.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$  una funzione **limitata**.

Se  $\{f_n\}$  converge **uniformemente** in  $X$ , allora: la funzione limite è limitata.

*Dimostrazione ...*

### Proposizione (convergenza uniforme e continuità)

Siano  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  spazi metrici. Sia  $\bar{x} \in X$ .

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$  una funzione **continua in  $\bar{x}$** .

Se  $\{f_n\}$  converge **uniformemente** in un intorno di  $\bar{x}$ , allora: la funzione limite è continua in  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione ... già fatta!*    (Vedi l'esempio " $C_b(X, Y)$  è chiuso in  $(B(X, Y), d_\infty)$ ")

## Osservazioni

- Se una successione di funzioni limitate converge puntualmente ma non uniformemente, non è detto che la funzione limite sia limitata.  
Esempi ...                      ↑ non è precluso ma non è garantito
- Se una successione di funzioni continue converge puntualmente ma non uniformemente, non è detto che la funzione limite sia continua.  
Esempi ...
- Se una successione di funzioni limitate converge puntualmente a una funzione non limitata, si può escludere che la convergenza sia uniforme.
- Se una successione di funzioni continue in un punto converge puntualmente a una funzione non continua in quel punto, si può escludere che la convergenza sia uniforme in un intorno del punto.

Riprendere gli esempi ...

Sia  $X$  un insieme e sia  $(Y, d_Y)$  uno spazio metrico.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$ . Sia  $f : X \rightarrow Y$ .

Diciamo che  $\{f_n\}$  soddisfa la **condizione di Cauchy uniforme in  $X$**  se per ogni  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  risulta  $\sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$  definitivamente.

### Proposizione

- 1 Se la successione  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $X$ , allora essa soddisfa la condizione di Cauchy uniforme in  $X$ .
- 2 Se  $(Y, d_Y)$  è **completo** e la successione  $\{f_n\}$  soddisfa la condizione di Cauchy uniforme in  $X$ , allora essa converge uniformemente in  $X$ .

*Dimostrazione ...*

*Dimostrazione del teorema sulla completezza di  $B(X, Y)$  rispetto alla metrica dell'estremo superiore ...*

## Passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata

Nei prossimi due risultati consideriamo successioni di funzioni reali di variabile reale.

### Teorema (passaggio al limite sotto il segno di integrale)

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua.

Supponiamo che  $\{f_n\}$  converga uniformemente in  $[a, b]$ .

Allora, denotata con  $f$  la funzione limite uniforme di  $\{f_n\}$ , si ha:

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

*Dimostrazione ...*

### Nota

Nelle ipotesi del teorema precedente, le funzioni  $f_n$  e  $f$  sono integrabili secondo Riemann in quanto continue in un intervallo compatto.

Assumendo che le  $f_n$  siano solo integrabili secondo Riemann, si dimostra che anche  $f$  è integrabile secondo Riemann e soddisfa (\*).

## Osservazioni

- Se la successione  $\{f_n\}$  non converge uniformemente, non è detto che valga l'uguaglianza in (\*).

Esempio:  $f_n(x) = n^p x (1 - x^2)^n$ ,  $x \in [0, 1]$

- Il TPLSSI si estende a funzioni vettoriali e a funzioni definite in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  compatto e misurabile secondo Peano-Jordan.
- Il TPLSSI si estende a successioni di funzioni integrabili **in senso generalizzato** su intervalli limitati ma non su intervalli illimitati.

Esempi ...

## Esempio

Utilizzare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{-nx^2} + n}{3n + 1} dx.$$

### Teorema (passaggio al limite sotto il segno di derivata)

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n \in C^1(I, \mathbb{R})$ .

Supponiamo che:

- (i) esista  $x_0 \in I$  tale che  $\{f_n(x_0)\}$  converge;
- (ii) la successione  $\{f'_n\}$  converga uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in  $I$ .

Allora:

- esiste  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\{f_n\}$  converge a  $f$  puntualmente in  $I$  e uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in  $I$ ;
- $f$  è di classe  $C^1$  in  $I$  e si ha

$$(**) \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) \quad \text{per ogni } x \in I.$$

*Dimostrazione* ...

Supponendo solo  $f_n$  derivabile in  $I$ , con dimostrazione più articolata si ottengono le stesse conclusioni, con la ovvia differenza che  $f$  risulta solo derivabile.

## Osservazioni

- A differenza che nel TPLSSI, supporre che la successione  $\{f_n\}$  converga uniformemente non basta a garantire che la funzione limite sia derivabile, né che valga l'uguaglianza in (\*\*).

Esempi:  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$

limite non derivabile

limite derivabile ma non vale (\*\*)

- Se  $I$  è illimitato, anche supponendo che  $\{f'_n\}$  converga uniformemente **in tutto**  $I$ , non si può garantire che  $\{f_n\}$  faccia altrettanto.

Esempio:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, n] \\ 1 + \cos(\pi x/n) & x \in ]n, 2n[ \\ 2 & x \in [2n, +\infty[ \end{cases}$$

- Il TPLSSD si estende a funzioni vettoriali e a funzioni di più variabili.  
immediato  $\uparrow$  opportune ipotesi  $\uparrow$

## Ulteriori spazi funzionali

Ricordiamo che  $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach.

Consideriamo l'insieme

$$C^1([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile con derivata continua}\}.$$

- $C^1([a, b], \mathbb{R})$  è un sottospazio vettoriale di  $C([a, b], \mathbb{R})$ .
- $C^1([a, b], \mathbb{R})$  eredita da  $C([a, b], \mathbb{R})$  la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , rispetto alla quale **non** è completo. **Giustificare ...**

- La funzione  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mapsto \|f'\|_\infty$  **non** è una norma. **Perché?**

- La funzione definita ponendo

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{per ogni } f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$$

Interpretazione grafica?

è una norma, detta **norma Lagrangiana di ordine 1**.

- $(C^1([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$  è uno spazio di Banach. **Verifica ...**

Per  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , consideriamo l'insieme

$$C^k([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile } k \text{ volte con derivata } k\text{-esima continua}\}$$

e la funzione definita ponendo

$$\|f\|_{C^k} := \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \dots + \|f^{(k)}\|_{\infty} \quad \text{per ogni } f \in C^k([a, b], \mathbb{R}).$$

↑ norma Lagrangiana di ordine  $k$

Si riconosce facilmente che  $(C^k([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^k})$  è uno spazio di Banach.

Nota

Ponendo  $C([a, b], \mathbb{R}) =: C^0([a, b], \mathbb{R})$  e  $\|\cdot\|_{\infty} =: \|\cdot\|_{C^0}$  e  $\downarrow$  norma Lagrangiana di ordine 0

otteniamo una successione di spazi di Banach tali che

$$C^k([a, b], \mathbb{R}) \subset C^{k-1}([a, b], \mathbb{R}), \quad \|f\|_{C^k} = \|f\|_{C^{k-1}} + \|f^{(k)}\|_{C^0}.$$

## Serie di funzioni a valori in uno spazio normato

Sia  $X$  un insieme e sia  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  uno spazio normato.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$ .

Definiamo la **funzione somma parziale  $n$ -esima associata a  $\{f_n\}$**  ponendo

$$S_n := \sum_{k=0}^n f_k$$

a valori in  $Y$  spazio normato,  
quindi metrico  $\downarrow$

e chiamiamo **serie di funzioni di termine  $f_n$**  la **successione di funzioni  $\{S_n\}$** .

Se  $\{S_n\}$  converge puntualmente in  $X$  con funzione limite puntuale  $f$ , diciamo che **la serie di funzioni di termine  $f_n$  converge puntualmente in  $X$  con funzione somma puntuale  $f$** .

Se  $\{S_n\}$  converge uniformemente in  $X$  con funzione limite uniforme  $f$ , diciamo che **la serie di funzioni di termine  $f_n$  converge uniformemente in  $X$  con funzione somma uniforme  $f$** .

Nell'uno o nell'altro caso scriviamo  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .

Esplicitiamo le definizioni:

- la serie di funzioni di termine  $f_n$  converge **puntualmente** in  $X$  con somma  $f$  se e solo se **per ogni  $x \in X$** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(x) - f(x)\|_Y = 0$ ;  
ciò equivale a dire che:  
per ogni  $x \in X$  la serie di termine  $f_n(x)$  converge nello spazio normato  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  con somma  $f(x)$ ;
- la serie di funzioni di termine  $f_n$  converge **uniformemente** in  $X$  con somma  $f$  se e solo se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \|S_n(x) - f(x)\|_Y = 0$ .

Osservazione (**condizioni necessarie per convergenza puntuale e uniforme**)

Notando che  $f_n = S_n - S_{n-1}$  per ogni  $n \geq 1$ , deduciamo che:

**condizione necessaria** affinché la serie di funzioni di termine  $f_n$  converga puntualmente / uniformemente in  $X$  è che la successione  $\{f_n\}$  converga puntualmente / uniformemente in  $X$  alla funzione costante di valore 0.  
zero dello spazio vettoriale  $Y \uparrow$

Sia  $X$  un insieme e sia  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  uno spazio normato.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$ .

Diciamo che la serie di funzioni di termine  $f_n$  converge **assolutamente** in  $X$  se per ogni  $x \in X$  la serie numerica di termine  $\|f_n(x)\|_Y$  converge.

Diciamo che la serie di funzioni di termine  $f_n$  converge **totalmente** in  $X$  se la serie numerica di termine  $\sup_{x \in X} \|f_n(x)\|_Y$  converge.

### Osservazione

Se una serie di funzioni di termine  $f_n$  converge totalmente in  $X$ , allora essa converge assolutamente in  $X$ . **Perché?**

Il viceversa non è vero. Esempio:  $f_n(x) = nx e^{-nx}$ ,  $x \in [0, +\infty[$

### Nota

Studiando la convergenza totale di una serie di funzioni, non è restrittivo supporre che, almeno definitivamente,  $f_n$  sia una funzione limitata.

### Proposizione (condizioni sufficienti per convergenza puntuale e uniforme)

Sia  $X$  un insieme e sia  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  uno spazio di Banach.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$ .

- 1 Se la serie di funzioni di termine  $f_n$  converge assolutamente in  $X$ , allora converge puntualmente in  $X$ .
- 2 Se la serie di funzioni di termine  $f_n$  converge totalmente in  $X$ , allora converge uniformemente in  $X$ .

*Dimostrazione ...*      *Tabella riassuntiva dei tipi di convergenza ...*

### Osservazione (caratterizzazione della convergenza totale)

La serie di funzioni di termine  $f_n$  converge totalmente in  $X$  se e solo se esiste una successione  $\{M_n\} \subset [0, +\infty[$  tale che

- (i) per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :  $\|f_n(x)\|_Y \leq M_n$  per ogni  $x \in X$ ,
- (ii) la serie di termine  $M_n$  converge.

## Esempi

Studiare la convergenza delle serie di funzioni di termini

$$\frac{\ln(1 + x^{2n})}{n^2 + 1}$$

$$\frac{\ln(1 + x^{2n})}{n + 1}$$

← Nota su convergenza  
uniforme e totale di serie  
di funzioni continue ...

$$n x e^{-nx}$$

$$(-1)^n \frac{n}{x^{2n} + 1}$$

$$\frac{x}{x^2 + n^2}$$

$$(-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$(-1)^n \frac{x^4}{n + x^4}$$

← Criterio di Leibniz 

$$\frac{\arctan(x^{2n})}{x^n}, \quad x \in ]0, +\infty[$$

## Proprietà generali della somma di una serie di funzioni

❶ Siano  $X$  un insieme e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  uno spazio normato.

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$  una funzione **limitata**.

Supponiamo che la serie di termine  $f_n$  converga **uniformemente** in  $X$ .

Allora: la funzione somma è limitata.

❷ Siano  $(X, d_X)$  uno spazio metrico e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  uno spazio normato.

Sia  $\bar{x} \in X$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : X \rightarrow Y$  una funzione **continua in  $\bar{x}$** .

Supponiamo che la serie di termine  $f_n$  converga **uniformemente** in  $X$ .

Allora: la funzione somma è continua in  $\bar{x}$ .

❸ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione **continua**.

Supponiamo che la serie di termine  $f_n$  converga **uniformemente** in  $[a, b]$ .

Allora, denotata con  $f$  la funzione somma uniforme di  $\{f_n\}$ , si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad \begin{array}{l} \text{integrazione} \\ \text{termine a termine} \end{array}$$

4 Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $f_n \in C^1(I, \mathbb{R})$ .

Supponiamo che:

- (i) esista  $x_0 \in I$  tale che la serie di termine  $\{f_n(x_0)\}$  converga;
- (ii) la serie di termine  $f'_n$  converga uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in  $I$ .

Allora:

- la serie di termine  $f_n$  converge puntualmente in  $I$  e uniformemente in ciascun intervallo compatto contenuto in  $I$ ;
- la funzione somma  $f$  è di classe  $C^1$  in  $I$  e si ha

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) \quad \text{per ogni } x \in I. \quad \begin{array}{l} \text{derivazione} \\ \text{termine a termine} \end{array}$$

Questi risultati si ottengono applicando alla successione delle somme parziali i corrispondenti risultati sulle successioni di funzioni; per il ruolo delle ipotesi e le possibili generalizzazioni valgono le medesime considerazioni.

## Prima di proseguire: complementi di AM I

Sia  $\{x_n\}$  una successione di numeri reali. Sia  $x \in \mathbb{R}$ .

Diciamo che  $x$  è **maggiorante definitivo** [**minorante definitivo**] di  $\{x_n\}$  se **esiste**  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \nu$  risulta  $x_n \leq x$  [ $x_n \geq x$ ].

Sia  $\mathcal{M}^*$  l'insieme dei maggioranti definitivi di  $\{x_n\}$ .

Definiamo il **massimo limite** della successione ponendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty}'' x_n := \begin{cases} \inf \mathcal{M}^* & \text{se } \mathcal{M}^* \neq \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notazioni  
e nomi  
alternativi ...

Sia  $\mathcal{M}_*$  l'insieme dei **minoranti definitivi** di  $\{x_n\}$ .

Definiamo il **minimo limite** della successione ponendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty}' x_n := \begin{cases} \sup \mathcal{M}_* & \text{se } \mathcal{M}_* \neq \emptyset \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## Esempi

Determinare il massimo limite e il minimo limite di  $\{(-1)^n\}$  e  $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ .

## Osservazione

Sia  $\{x_n\}$  una successione di numeri reali e sia  $L \in \mathbb{R}$ .

Allora:

$L = \lim'' x_n$  se e solo se

- (i)\* per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $x_n < L + \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$ ,
- (ii)\* per ogni  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  si ha  $x_n > L - \varepsilon$  per infiniti indici;

↑ "frequentemente"

$L = \lim' x_n$  se e solo se

- (i)\* per ogni  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $x_n > L - \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$ ,
- (ii)\* per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha  $x_n < L + \varepsilon$  per infiniti indici.

## Osservazione

La successione  $\{x_n\}$  ha limite  $L \in \overline{\mathbb{R}}$  se e solo se

$$\lim'_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim''_{n \rightarrow +\infty} x_n = L.$$

$L \in \mathbb{R}$ : oss. precedente

$L = \pm\infty$ : definizione

Riesaminare gli esempi ...

## Osservazione

Sia  $\{x_n\}$  una successione di numeri reali.

- 1 Esistono una successione estratta da  $\{x_n\}$  che tende a  $\lim'_{n \rightarrow +\infty} x_n$  e una successione estratta da  $\{x_n\}$  che tende a  $\lim''_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .
- 2 Se  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  è il limite di una arbitraria successione estratta da  $\{x_n\}$ , allora

$$\lim'_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq x \leq \lim''_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Questo spiega il nome!

## Alcune proprietà di massimo limite e minimo limite

Siano  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  due successioni di numeri reali.

$$\textcircled{1} \inf_n x_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \sup_n x_n$$

$\textcircled{2}$  Se  $x_n \leq y_n$  per ogni  $n$ , allora:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

$$\textcircled{3} \limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

$\textcircled{4}$  Se  $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}_+$ , allora:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n \cdot y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n \cdot y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

} a eccezione  
delle forme  
di indecisione

## Nota

Nelle proprietà ③ e ④ possono valere le disuguaglianze strette.

Esempi ...

Le uguaglianze sono garantite se una delle due successioni è regolare.

## Criterio della radice

Sia  $\{x_n\}$  una successione di numeri reali e sia  $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$ .

- Se  $L \in [0, 1[$  la serie di termine  $x_n$  converge assolutamente;
- se  $L \in ]1, +\infty]$  la serie di termine  $x_n$  non converge;
- se  $L = 1$  non si può dire nulla sul carattere della serie di termine  $x_n$ .

*Dimostrazione ...* Risultato analogo per il rapporto?

## Criterio del rapporto

Sia  $\{x_n\}$  una successione di numeri reali con  $x_n \neq 0$  definitivamente.

Supponiamo che esista  $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ .

Allora:

valgono le stesse conclusioni del criterio della radice.

## Serie di potenze

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e sia  $\{c_n\}$  una successione di numeri reali.

Consideriamo le funzioni definite ponendo, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_0(x) = c_0, \quad f_n(x) = c_n (x - x_0)^n \quad (n \geq 1)$$

La corrispondente serie di funzioni si chiama **serie di potenze** di **centro**  $x_0$  e **coefficienti**  $\{c_n\}$ . (Nel prossimo semestre: serie di potenze in  $\mathbb{C}$ )

### Esempi

- Tra le serie considerate a pag. 18 c'è la serie di potenze di centro 0 e coefficienti  $c_0 = 0$ ,  $c_n = (-1)^n/n$  ( $n \geq 1$ )
- La serie geometrica di ragione  $x \in \mathbb{R}$  è la serie di potenze di centro 0 e coefficienti  $c_n = 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ )
- La serie esponenziale è la serie di potenze di centro 0 e coefficienti  $c_n = 1/n!$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

## Osservazioni

- L'insieme di convergenza puntuale di una serie di potenze è sempre non vuoto: la serie converge per  $x = x_0$  con somma  $c_0$ .
- Senza perdere di generalità, nella trattazione della teoria possiamo assumere  $x_0 = 0$ .

### Lemma (fondamentale sulle serie di potenze)

Sia data la serie di potenze di centro 0 e coefficienti  $\{c_n\}$ .

Supponiamo che la serie converga in  $\bar{x} \neq 0$ .

Allora:

la serie converge **assolutamente** nell'intervallo  $]-|\bar{x}|, |\bar{x}[$  e **totalmente** in ciascun intervallo **compatto** contenuto in  $]-|\bar{x}|, |\bar{x}[$ .

*Dimostrazione ...*

Chiamiamo **raggio di convergenza** della serie l'**estremo superiore** del suo insieme di convergenza puntuale. In simboli:

$$\sup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{la serie di termine } c_n x^n \text{ converge} \right\}.$$

$\uparrow \in [0, +\infty]$

**Teorema (sul raggio di convergenza)**

Data la serie di potenze di centro 0 e coefficienti  $\{c_n\}$ :

- ① il raggio di convergenza è 0 se e solo se la serie converge solo per  $x = 0$ ;
- ② il raggio di convergenza è  $+\infty$  se e solo se la serie converge assolutamente in  $\mathbb{R}$ ;
- ③ il raggio di convergenza è un numero reale strettamente positivo  $\delta$  se solo se la serie converge assolutamente per  $|x| < \delta$  e non converge per  $|x| > \delta$ .

*Dimostrazione . . .*

## Esempi

Determinare il raggio di convergenza delle serie di potenze di termine

$$(-1)^n \frac{x^n}{n} \quad x^n \quad \frac{x^n}{n!} \quad n! x^n \quad \text{C'è un modo più rapido?}$$

Criterio (di **Cauchy-Hadamard**) per la determinazione del r.d.c.

Data la serie di potenze di centro 0 e coefficienti  $\{c_n\}$ , sia

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Allora: il raggio di convergenza della serie è

$$R := \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = +\infty \\ 1/\alpha & \text{se } \alpha \in ]0, +\infty[ \\ +\infty & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{reciproco in senso ampliato di } \alpha$$

Verifica ...

Criterio (di d'Alembert) per la determinazione del r.d.c.

Sia data la serie di potenze di centro 0 e coefficienti  $\{c_n\}$ , con  $c_n \neq 0$  definitivamente.

Supponiamo che esista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} =: \alpha$ .

Allora:

il raggio di convergenza della serie è uguale al reciproco in senso ampliato di  $\alpha$ .

Si dimostra come il criterio di Cauchy-Hadamard, utilizzando il criterio del rapporto invece di quello della radice.

Riesaminare gli esempi ...

## Osservazione

Supponiamo di aver determinato il raggio di convergenza  $R$  mediante uno dei due criteri.

Se  $R = +\infty$ , il comportamento della serie è completamente determinato.

Infatti, la serie:

- converge assolutamente in  $\mathbb{R}$ ; teorema sul r.d.c.
- converge totalmente (e quindi uniformemente) in qualsiasi intervallo compatto; teorema sul r.d.c. + lemma fondamentale
- non converge uniformemente (e quindi totalmente) in  $\mathbb{R}$ . perché?

Se  $R \in ]0, +\infty[$ , in base al teorema sul r.d.c. la serie:

- converge assolutamente in  $] -R, R[$  e non converge puntualmente in  $] -\infty, -R[ \cup ] R, +\infty[$ ; e negli estremi?
- converge totalmente (e quindi uniformemente) in qualsiasi intervallo compatto contenuto in  $] -R, R[$ . e al di fuori dei compatti?

## Informazioni aggiuntive sulla convergenza nel caso $R \in ]0, +\infty[$

- Il teorema non specifica se gli estremi dell'intervallo di convergenza puntuale fanno parte o meno dello stesso; la **convergenza puntuale** negli estremi dell'intervallo di convergenza deve essere studiata caso per caso. Esempi ...
- Se la serie converge in un estremo dell'intervallo di convergenza, allora converge **uniformemente** nell'intervallo chiuso di estremi il centro della serie e l'estremo in cui converge. (**Teorema di Abel**)
- La serie converge **assolutamente** in entrambi gli estremi dell'intervallo di convergenza o in nessuno dei due.
- La serie converge **totalmente** in  $[-R, R]$  se e solo se converge assolutamente negli estremi dell'intervallo di convergenza.

### Esempio

Riesaminare la serie di termine  $(-1)^n \frac{x^n}{n}$ .

## Esempi

Studiare la convergenza delle serie di termine

$$(2^n + 3^n) x^n \quad \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n} \quad \frac{x^{2n}}{n}$$

$$\frac{(-1)^n n^2}{n^4 + 2} \left( \frac{x^2 - 3}{x + 2} \right)^n \quad \frac{(x^2 - 3)^n e^{nx}}{e^{2n} + 1}$$

$$\frac{n2^n + 1}{n^2} \left( \frac{x}{x^2 + 1} \right)^n$$

“riconducibili” a  
serie di potenze

## Proprietà generali della somma di una serie di potenze

In questa sezione  $f$  è la funzione somma della serie di potenze di centro  $x_0$ , coefficienti  $\{c_n\}$  e raggio di convergenza  $R \in ]0, +\infty]$ .

### Proposizione (continuità)

$f$  è continua in tutto l'intervallo di convergenza puntuale.

*Motivazione ...*

### Proposizione (integrazione termine a termine)

Per ogni  $x$  appartenente all'intervallo di convergenza puntuale si ha

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{n} (x - x_0)^n.$$

*Motivazione ...*

## Osservazione

La serie di potenze ottenuta integrando termine a termine ha lo stesso raggio di convergenza della serie data; lo stesso è vero per la serie delle derivate. *Verifica ...*

## Proposizione (derivazione termine a termine)

$f$  è di classe  $C^\infty$  in  $]x_0 - R, x_0 + R[$  con

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) c_{n+1} (x - x_0)^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (x - x_0)^{n-k} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

*Motivazione ...*

## Osservazione

Dall'ultima uguaglianza della pagina precedente, ponendo  $x = x_0$  si ottiene  $f^{(k)}(x_0) = k! c_k$ , che equivale a

$$(*) \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

La relazione (\*) ha alcune importanti conseguenze.

Per incominciare:

## Principio di identità delle serie di potenze

Se due serie di potenze con lo stesso centro hanno la stessa somma in un intervallo **non banale** contenente il centro, allora hanno gli stessi coefficienti e sono quindi identiche.

*Motivazione ...*

Esaminiamo la seconda conseguenza della relazione

$$(*) \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Se  $f$  è la funzione somma di una serie di potenze di centro  $x_0$  con raggio di convergenza  $R \neq 0$ , allora i coefficienti di tale serie soddisfano (\*), quindi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{per ogni } x \in ]x_0 - R, x_0 + R[.$$

Dunque:

l'unica serie di potenze di cui  $f$  può essere somma è la **serie di Taylor di centro  $x_0$  di  $f$** . Relazione con polinomi di Taylor? ↑

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$  e  $x_0$  un punto interno ad  $A$ .

Diciamo che  $f$  è **svilupicabile in serie di Taylor** (o **analitica**) in  $x_0$  se esiste  $\delta \in \mathbb{R}_+^*$  tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{per ogni } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ ,$$

ossia se  $f$  coincide con la somma della propria serie di Taylor di centro  $x_0$  in un **intorno** di  $x_0$ .

↑ in  $x_0$  l'uguaglianza è garantita

## Note

- Le funzioni somma di serie di potenze sono sviluppicabili in serie di Taylor, nel centro (ovvio!) **ma non solo**. **Spiegare . . .**
- Non tutte le funzioni di classe  $C^\infty$  sono sviluppicabili in serie di Taylor. Esempio. . . **già visto in Analisi I**

## Teorema (condizione sufficiente per l'analiticità)

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$  e  $x_0$  un punto interno ad  $A$ .

Se la successione di funzioni  $\{f^{(n)}\}$  è **equilimitata in un intorno di  $x_0$** , allora  $f$  è sviluppabile in serie di Taylor in  $x_0$ .

Esplicitando: se esistono  $M, \delta \in \mathbb{R}_+^*$  tali che

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{per ogni } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \quad \text{e per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{per ogni } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

*Dimostrazione ...*

## Esempi


Le funzioni **seno**, **coseno**, **esponenziale** sono sviluppabili in serie di Taylor in  $x_0 = 0$  con raggio di convergenza  $R = +\infty$ . [▶ grafici](#)

E la funzione logaritmo?

## Osservazione

Per quanto notato a pagina 38, per riconoscere che una funzione è sviluppabile in serie di Taylor in  $x_0$  è sufficiente riuscire a scriverla come somma di una serie di potenze di centro  $x_0$  con raggio di convergenza non nullo. Pertanto: a partire da sviluppi di Taylor noti, se ne possono ottenere altri per integrazione o derivazione termine a termine, oppure attraverso manipolazioni algebriche.

## Esempi

- La funzione  $x \mapsto \ln(1+x)$  è sviluppabile in serie di Taylor in  $x_0 = 0$  con raggio di convergenza  $R = 1$ . 
- La funzione **arcotangente** è sviluppabile in serie di Taylor in  $x_0 = 0$  con raggio di convergenza  $R = 1$ . **Ostruzione? Piano complesso!**
- Le funzioni **seno iperbolico** e **coseno iperbolico** sono sviluppabili in serie di Taylor in  $x_0 = 0$  con raggio di convergenza  $R = +\infty$ .

## Alcune applicazioni delle serie di potenze

### 1 Valutazione di funzioni trascendenti

Calcolare  $\cos(0.5)$  con un errore inferiore a  $10^{-3}$ .

Calcolare  $\ln(1.2)$  con un errore inferiore a  $10^{-3}$ .  $\ln(0.7)$ ?  $\ln(2.5)$ ?

### 2 Integrazione approssimata

Calcolare  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  a meno di  $10^{-3}$ .  $\rightarrow$  funzione degli errori, distribuzione normale

Calcolare  $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$  con un errore inferiore a  $10^{-4}$ .

Calcolare  $\int_0^1 \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3} dx$  con un errore inferiore a  $10^{-4}$ .

### ③ Soluzione in serie di potenze di equazioni differenziali lineari (solo un cenno)

Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0,$$

con coefficienti  $a_0$  e  $a_1$  definiti in un intervallo  $I$ .

#### Presupposto teorico

Dato  $t_0 \in I$ , supponiamo che i coefficienti siano funzioni **analitiche** in  $t_0$ .  
Allora:

- l'equazione ammette un sistema fondamentale di soluzioni costituito da funzioni analitiche in  $t_0$ ;
- i raggi di convergenza delle serie corrispondenti alle due soluzioni sono non inferiori al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenze corrispondenti ai coefficienti.

## Procedimento

- 1 Scriviamo la soluzione come somma di una serie di potenze, i cui coefficienti sono incogniti; deriviamo termine a termine e sostituiamo nell'equazione.
- 2 Applicando il **principio di identità** delle serie di potenze, otteniamo una relazione ricorsiva tra i coefficienti.
- 3 Calcoliamo i coefficienti e otteniamo la soluzione.

## Esempi

Risolvere in serie di potenze le seguenti equazioni differenziali

- $y'' + y = 0$       soluzione già nota!
- $y'' - ty = 0$       equazione di Airy      ► grafici
- $(t^2 + 1)y'' + ty' - y = 0$       ← prodotto tra serie di potenze ...

## Polinomi trigonometrici e serie trigonometriche

Un **polinomio trigonometrico di ordine  $n$**  è una combinazione lineare delle funzioni **1** e  **$\cos(kx)$ ,  $\sin(kx)$** , con  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Esplicitando:

$$(*) \quad P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

con  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  (“**coefficienti**”).

### Osservazione

Il polinomio trigonometrico in  $(*)$  è una funzione definita in  $\mathbb{R}$  e **periodica di periodo  $2\pi$** . Si possono definire polinomi trigonometrici di **arbitrario periodo  $T \in ]0, +\infty[$**  considerando combinazioni lineari delle funzioni

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right).$$

In quanto segue consideriamo prevalentemente  $T = 2\pi$ .

Siano date le successioni  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

La serie di funzioni costruita a partire dalla successione di funzioni

$$a_0, \quad a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x), \quad a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x), \dots$$

si chiama **serie trigonometrica** di coefficienti  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ .

Successione delle somme parziali?

Esempio

Studiare la convergenza della serie trigonometrica di coefficienti  $a_n = \frac{n^6}{n!}$  e  $b_n = 0$ .

Osservazione

Condizione **sufficiente** affinché la serie trigonometrica di coefficienti  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  **converga totalmente in  $\mathbb{R}$**  è che le serie numeriche di termine  $a_n$  e  $b_n$  siano assolutamente convergenti. **Motivazione ...**

## Coefficienti, polinomi e serie di Fourier – preliminari

Problema:

↓  $2\pi$ -periodica

data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $2\pi$ , esiste una serie trigonometrica che converge a  $f$  in qualche senso opportuno?

Oppure:

esiste un polinomio trigonometrico che approssima la funzione meglio degli altri polinomi trigonometrici, in qualche senso opportuno?

In caso affermativo, come si individuano la serie o il polinomio, ossia: come si scelgono i coefficienti?

## Formule di ortogonalità ← ??

Siano  $n, m \in \mathbb{N}$ . Allora:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m = 0 \\ \pi & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \quad (n = m = 0) \\ \pi & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 \quad \forall n, m$$

Nota: le funzioni  $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots$  sono **ortogonali** rispetto al **prodotto scalare** definito in  $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  ponendo

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

norma indotta =  
norma quadratica

## Coefficienti, polinomi e serie di Fourier

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica. Supponiamo che  $f$  e le funzioni

$$x \mapsto f(x) \cos(nx), \quad x \mapsto f(x) \sin(nx) \quad (n \geq 1)$$

siano integrabili secondo Riemann (o in senso generalizzato) in  $[-\pi, \pi]$ .

Definiamo i coefficienti di Fourier di  $f$  ponendo

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{Perché proprio queste formule?}$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n \geq 1)$$

Chiamiamo polinomio di Fourier di  $f$  di ordine  $n$  il polinomio trigonometrico di ordine  $n$  che ha per coefficienti i coefficienti di Fourier di  $f$ ; lo denotiamo con  $F_n$ .

Chiamiamo serie di Fourier di  $f$  la serie trigonometrica che ha per coefficienti i coefficienti di Fourier di  $f$ ; denotiamo la sua somma con  $F$ .

## Osservazione

Dato che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è  $2\pi$ -periodica, nel definire i coefficienti di Fourier possiamo calcolare gli integrali in **qualsiasi** intervallo di ampiezza  $2\pi$ .

Scegliere l'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , che è simmetrico rispetto a 0, permette di sfruttare eventuali simmetrie della funzione  $f$ :

- se  $f$  è **pari**, allora:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = 0;$$

- se la restrizione di  $f$  a  $]-\pi, \pi[$  è **dispari**, allora:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Perché non “ $f$  dispari”?

## Esempi

Scrivere le serie di Fourier delle seguenti funzioni:

- 1 il prolungamento  $2\pi$ -periodico della funzione  $x \in [0, 2\pi[ \mapsto (x - \pi)^2$
- 2 il prolungamento  $2\pi$ -periodico della funzione  $x \in [-\pi, \pi[ \mapsto x$
- 3 il prolungamento  $2\pi$ -periodico della funzione  $x \in [-\pi, \pi[ \mapsto |x|$
- 4 la funzione **mantissa** ← serie di Fourier per funzioni  $T$ -periodiche ...

**Teorema (serie di Fourier e distanza quadratica)** ← “pseudo-distanza”

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica e Riemann-integrabile.

Per ogni  $n$ , siano  $a_n, b_n$  i coefficienti di Fourier di  $f$  e sia  $F_n$  il suo polinomio di Fourier di ordine  $n$ . Allora:

① Se  $P_n$  è un qualsiasi polinomio trigonometrico di ordine  $n$ , si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx$$

il polinomio di Fourier  
minimizza la distanza  
quadratica da  $f$

$$\textcircled{2} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \pi \left[ 2 a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right];$$

$$\textcircled{3} \quad 2 a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

disuguaglianza di Bessel

$$\textcircled{4} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

teorema di Riemann-Lebesgue

*Dimostrazione . . .*

Nota ↓ con strumenti di cui non disponiamo

Si dimostra che la disuguaglianza di Bessel è in realtà una uguaglianza, chiamata **identità di Parseval**.

Da ② discende allora che, **rispetto alla distanza quadratica**, la successione dei polinomi di Fourier di  $f$  converge a  $f$ , ossia **la serie di Fourier di  $f$  converge e ha somma  $f$** .

→ **rappresentazione di  $f$  rispetto a un insieme ortonormale infinito . . .**

## Convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier

Richiamo: una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua a tratti** se esiste una suddivisione  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  di  $[a, b]$  tale che

- $f$  è **continua in**  $]x_{i-1}, x_i[$  per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;
- $f$  ammette **limiti unilaterali finiti** in ciascuno dei punti  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

Diciamo che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua a tratti se è tale in ogni intervallo compatto.

### Osservazione

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua a tratti, allora è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo compatto.

Data  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua a tratti, per ogni  $x \in \mathbb{R}$  poniamo

$$f(x^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x+t), \quad f(x^-) := \lim_{t \rightarrow 0^-} f(x+t).$$

Nota:  $f(x^+), f(x^-) \in \mathbb{R}$ .

Definiamo la **funzione regolarizzata**  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$\tilde{f}(x) := \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Nota:  $\tilde{f}$  e  $f$  coincidono nei punti in cui  $f$  è continua.

Funzioni regolarizzate negli esempi ① - ④

Diciamo che una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è **regolare a tratti** se esiste una suddivisione  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  di  $[a, b]$  tale che

- $f$  è di classe  $C^1$  in  $]x_{i-1}, x_i[$  per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;
- $f'$  ammette **limiti unilaterali finiti** in ciascuno dei punti  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

Diciamo che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è regolare a tratti se è tale in ogni intervallo compatto.

Nota: ogni funzione regolare a tratti è anche continua a tratti.

$f$  regolare a tratti equivale a  $f'$  continua a tratti?

Diciamo che una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è **monotona a tratti** se esiste una suddivisione  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  di  $[a, b]$  tale che

- la restrizione di  $f$  a  $]x_{i-1}, x_i[$  è **monotona** per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Diciamo che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è monotona a tratti se è tale in ogni intervallo compatto.

## Teorema (convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier)

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica e continua a tratti.

- 1 Se  $f$  è regolare a tratti oppure monotona a tratti, allora la serie di Fourier di  $f$  converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  alla funzione regolarizzata di  $f$ .
- 2 Se  $f$  è regolare a tratti e continua, allora la serie di Fourier di  $f$  converge a  $f$  uniformemente in  $\mathbb{R}$ .
- 3 Se  $f$  è regolare a tratti e ha punti di discontinuità, allora la serie di Fourier di  $f$  converge a  $f$  uniformemente in ogni intervallo compatto che non contiene tali punti.

*Dimostrazione di 2* ...

## Nota

Il teorema fornisce condizioni solo **sufficienti** per la convergenza delle serie di Fourier; esistono risultati di convergenza puntuale anche per funzioni non limitate.

Qualche ipotesi ci vuole, però!

## Esempi

Studiare la convergenza delle serie di Fourier negli esempi ① - ④.

▶ grafici per esempio 3

↑  
quasi!

### Esempio (onda quadra)

Scrivere la serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica ottenuta prolungando la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in ]-\pi, 0] \\ 1 & x \in ]0, \pi] \end{cases}$$

e studiarne la convergenza.

▶ grafici

### Osservazione (integrazione termine a termine)

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e continua a tratti.

Siano  $a_n, b_n$  i suoi coefficienti di Fourier.

Allora: per ogni  $x, x_0 \in [-\pi, \pi]$  si ha

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x a_0 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] dt.$$

### Nota

Questo risultato non si può dedurre dal teorema di integrazione termine a termine per serie di funzioni qualsiasi: non supponendo che  $f$  sia continua, non è detto che la serie di Fourier converga uniformemente a  $f$ .

## Esempi

Sia  $f$  la funzione periodica di periodo 4 tale che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in [0, 2[, \\ 4 - \frac{x}{2} & \text{se } x \in [2, 4[. \end{cases}$$

- Discutere la applicabilità del teorema di convergenza puntuale e uniforme alla serie di Fourier associata a  $f$ .
- Determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a  $f$ .

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e sia  $f_\alpha$  la funzione pari e periodica di periodo 2 tale che  $f_\alpha(0) = 0$  e  $f_\alpha(x) = x^\alpha$  per  $x \in ]0, 1]$ .

- Discutere la applicabilità dei teoremi di convergenza puntuale e uniforme alla serie di Fourier associata a  $f_\alpha$ , al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a  $f_3$ .

## Applicazione delle serie di Fourier al calcolo della somma di serie numeriche

Utilizzare la serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica ottenuta prolungando la funzione  $x \in [-\pi, \pi[ \mapsto |x|$  per calcolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Già fatto!

Data la funzione  $f(x) = |\sin(x)|$ , periodica di periodo  $\pi$ ,

- discutere la applicabilità dei teoremi di convergenza puntuale e uniforme alla serie di Fourier associata a  $f$ ;
- determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a  $f$ ;
- utilizzare il punto precedente per calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

# APPENDICE

## Utilizzo del criterio di Leibniz per lo studio della convergenza uniforme di una serie di funzioni

Per ogni  $n$ , siano  $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  e  $f_n := (-1)^n g_n$ .

Supponiamo che per ogni  $x \in X$  la successione numerica  $\{g_n(x)\}$  sia **infinitesima** e **decescente**.

←  $\{f_n\}$  soddisfa puntualmente in  $X$   
le ipotesi del criterio di Leibniz

Allora:

- la serie di termine  $f_n$  converge puntualmente in  $X$ ;
- denotata con  $S_n$  la somma parziale  $n$ -esima e con  $f$  la somma della serie, per ogni  $x \in X$ :  $|S_n(x) - f(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ ;
- la serie di termine  $f_n$  converge uniformemente in  $X$  **se e solo se** la successione  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $X$  alla funzione costante di valore 0.

Quindi: per serie di funzioni che soddisfano puntualmente le condizioni del criterio di Leibniz, la condizione necessaria per la convergenza uniforme è anche sufficiente.

## Attenzione!!


Per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$ , sia  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$ .

Notiamo che:

- $b_1 = 0$  e  $b_n > 0$  per ogni  $n \geq 2$ ;
- $b_n \sim c_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ ;
- $\{c_n\}$  è decrescente, quindi la serie di termine  $(-1)^n c_n$  converge;
- la serie di termine  $(-1)^n b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$  diverge positivamente!

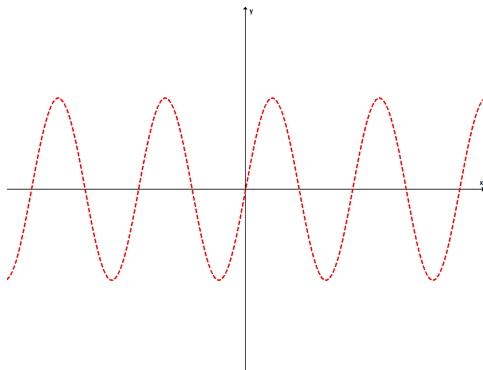
Come si spiega?

Due successioni asintoticamente equivalenti non hanno necessariamente la stessa monotonia. **Esempi ...**

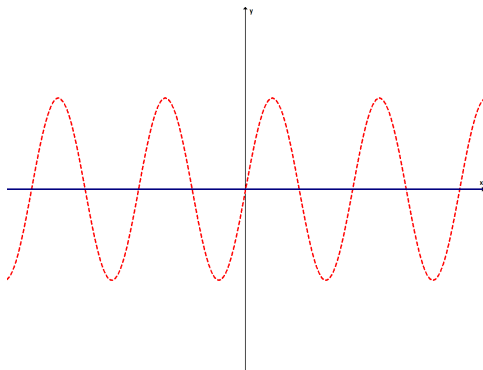
Quindi: nella verifica della ipotesi di monotonia del criterio di Leibniz NON è lecito sostituire la successione  $\{b_n\}$  con una successione asintoticamente equivalente. 

# GRAFICI

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$

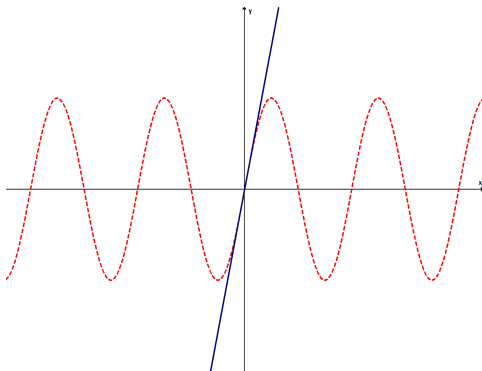


Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



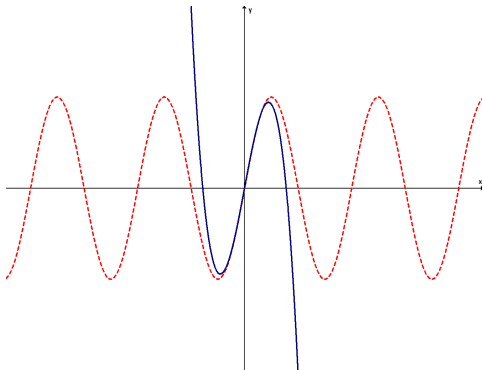
$$T_{0,0}(x) = 0$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



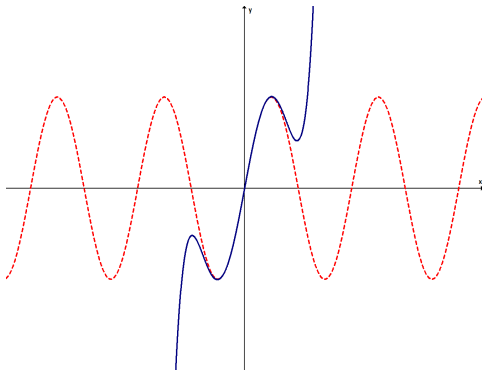
$$T_{0,1}(x) = T_{0,2}(x) = x$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



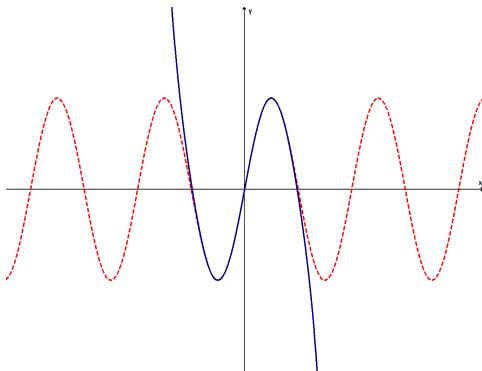
$$T_{0,3}(x) = T_{0,4}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



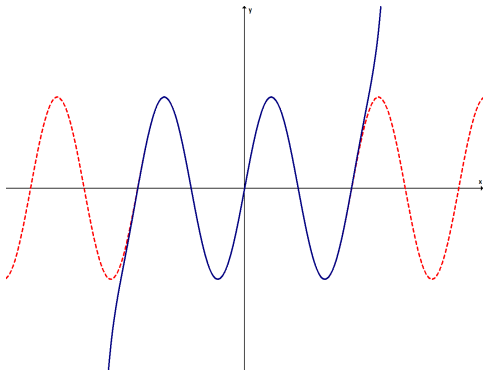
$$T_{0,5}(x) = T_{0,6}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



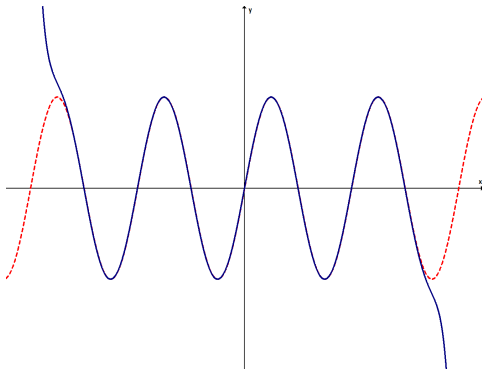
$$T_{0,7}(x) = T_{0,8}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



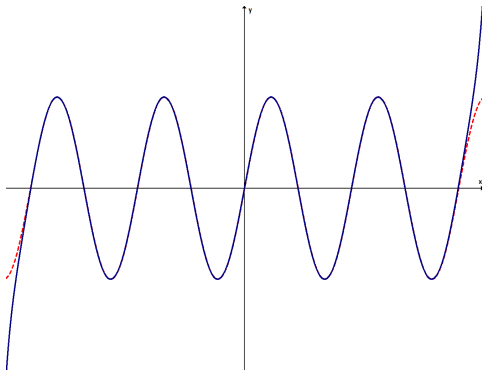
$$T_{0,17}(x) = T_{0,18}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{17}}{17!}$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



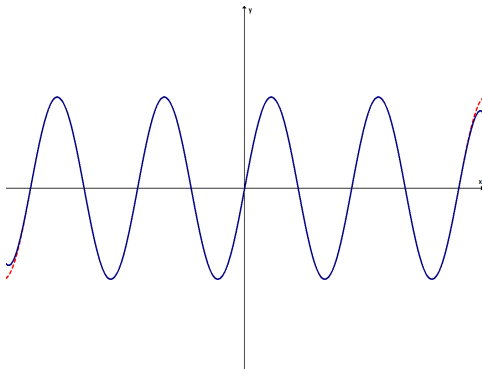
$$T_{0,27}(x) = T_{0,28}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{27}}{27!}$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



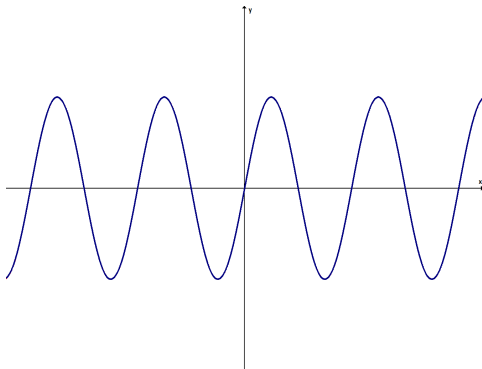
$$T_{0,33}(x) = T_{0,34}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{33}}{33!}$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$



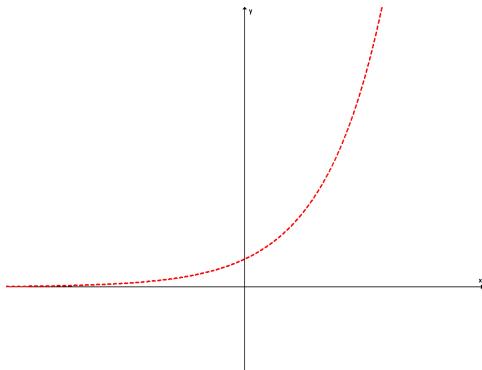
$$T_{0,35}(x) = T_{0,36}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{35}}{35!}$$

Funzione seno:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$

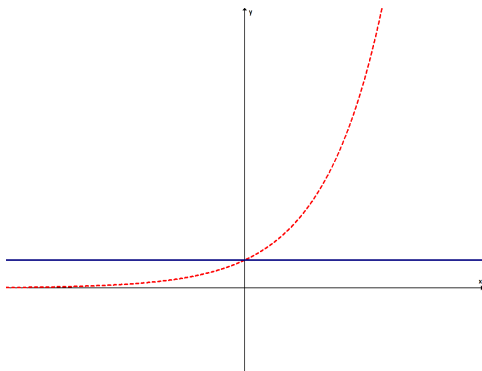


$$T_{0,39}(x) = T_{0,40}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{39}}{39!}$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$

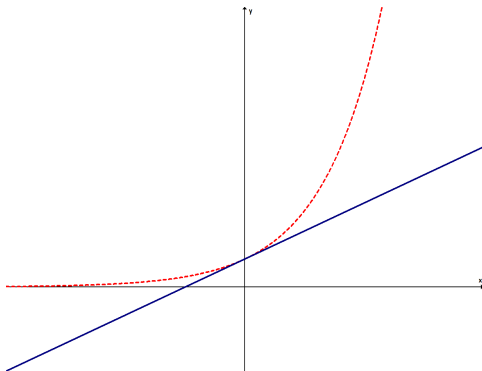


Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



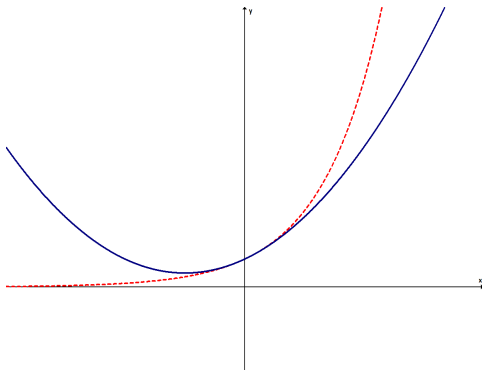
$$T_{0,0}(x) = 1$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



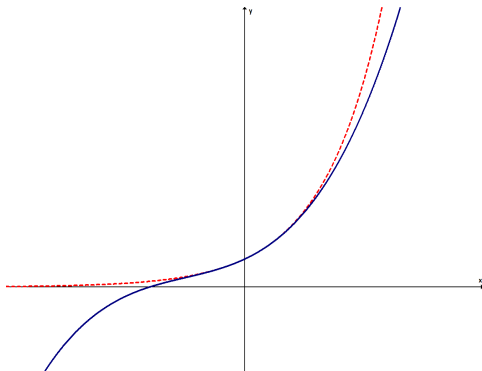
$$T_{0,1}(x) = 1 + x$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



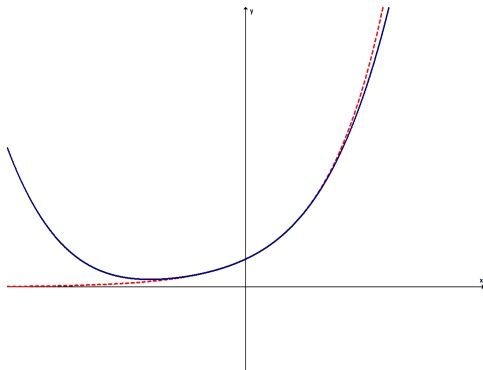
$$T_{0,2}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



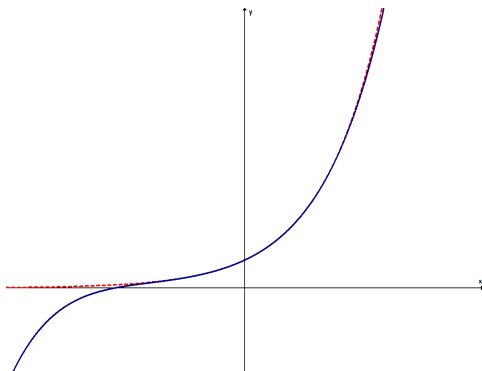
$$T_{0,3}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



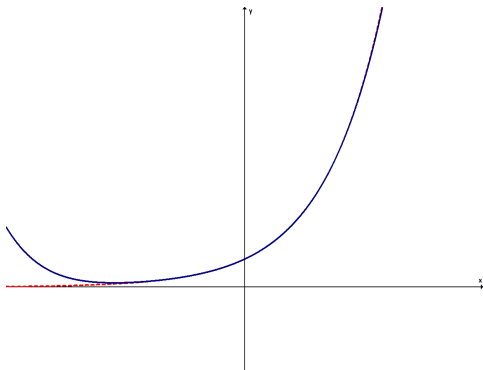
$$T_{0,4}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



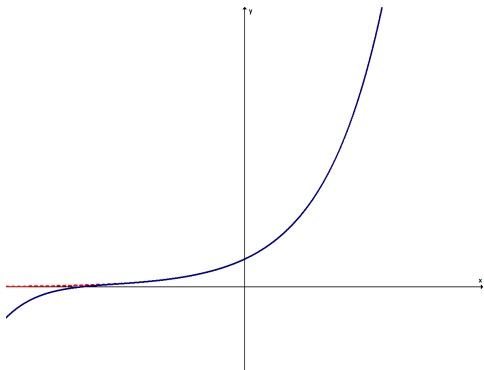
$$T_{0,5}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



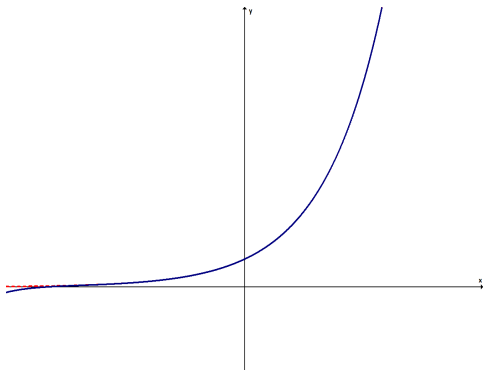
$$T_{0,6}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



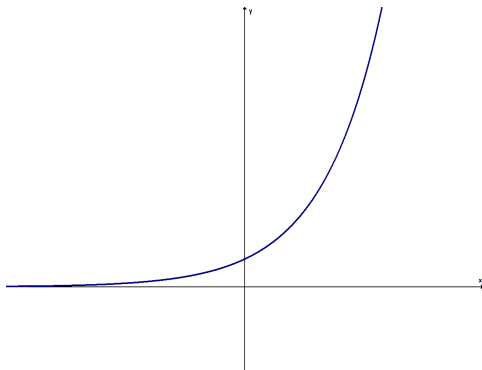
$$T_{0,7}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$



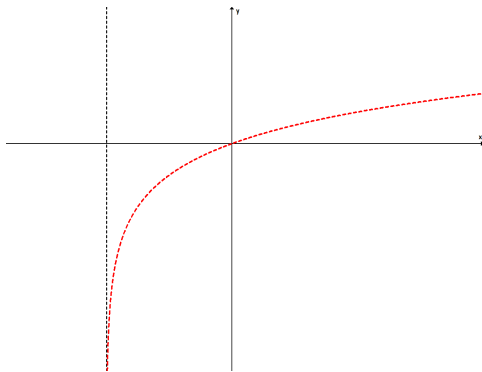
$$T_{0,9}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^9}{9!}$$

Funzione esponenziale:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$

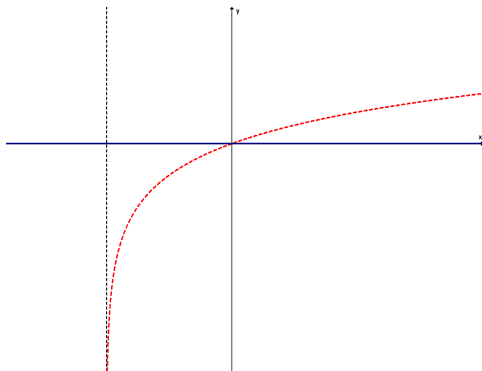


$$T_{0,12}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{12}}{12!}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1 + x)$ ,  $x_0 = 0$

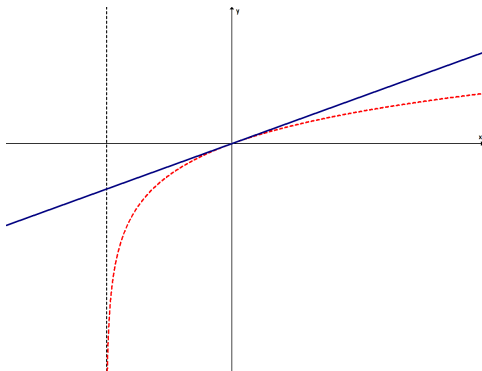


Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1 + x)$ ,  $x_0 = 0$



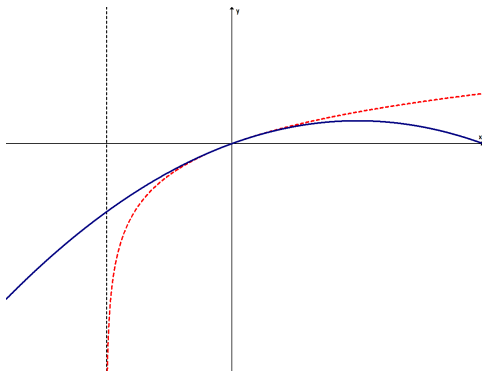
$$T_{0,0}(x) = 0$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1 + x)$ ,  $x_0 = 0$



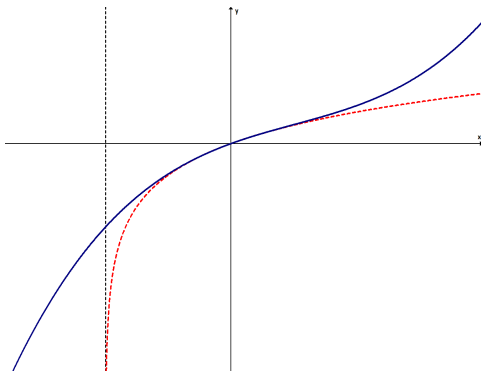
$$T_{0,1}(x) = x$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1 + x)$ ,  $x_0 = 0$



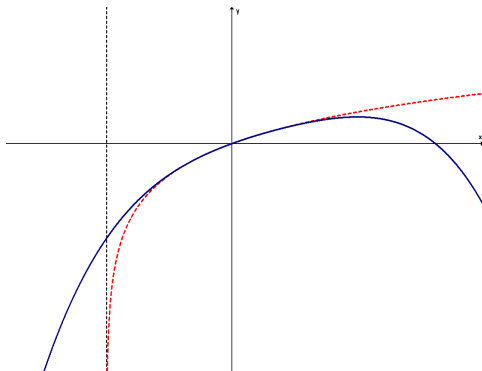
$$T_{0,2}(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$



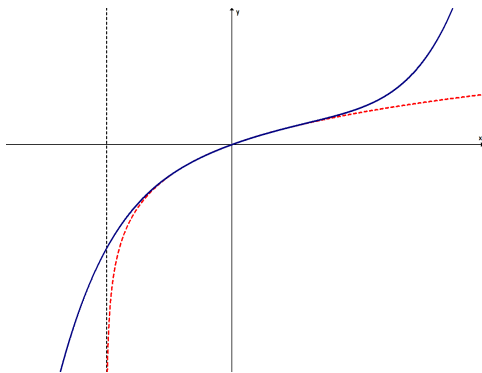
$$T_{0,3}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$



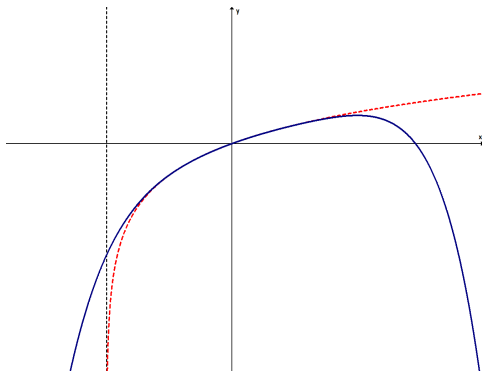
$$T_{0,4}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$



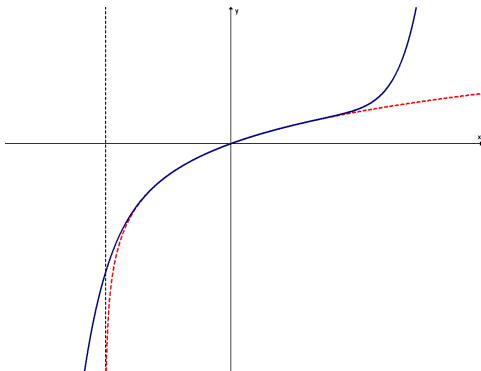
$$T_{0,5}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$



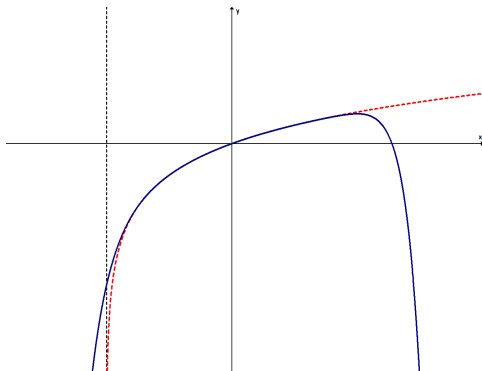
$$T_{0,6}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$



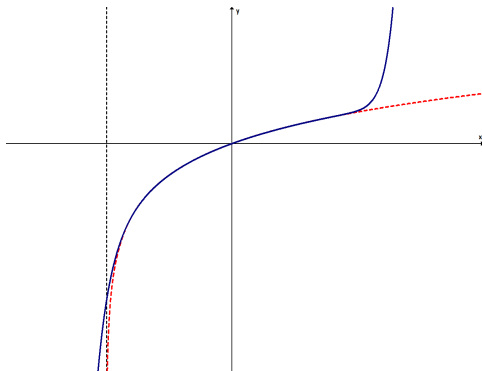
$$T_{0,9}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^9}{9}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$



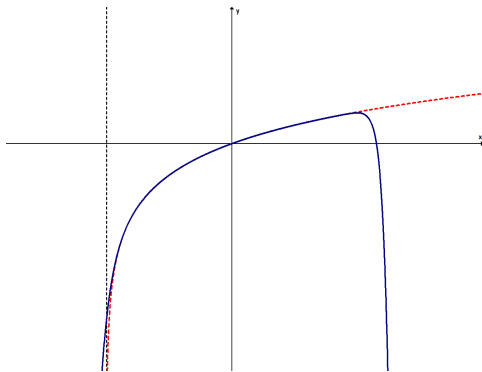
$$T_{0,12}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - \frac{x^{12}}{12}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$



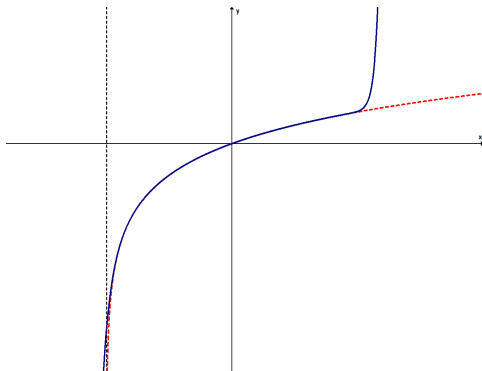
$$T_{0,17}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{17}}{17}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$



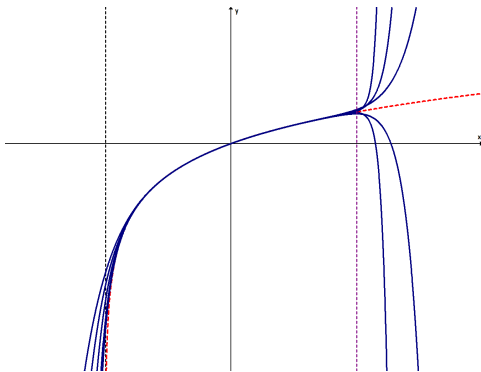
$$T_{0,26}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - \frac{x^{26}}{26}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$

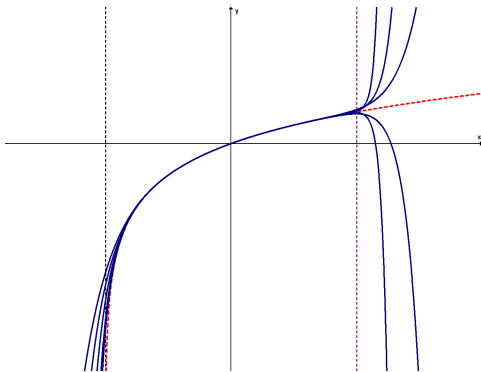


$$T_{0,33}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{33}}{33}$$

Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1 + x)$ ,  $x_0 = 0$



Funzione logaritmo:  $f(x) = \ln(1 + x)$ ,  $x_0 = 0$



Cosa succede per  $x = 1$ ?

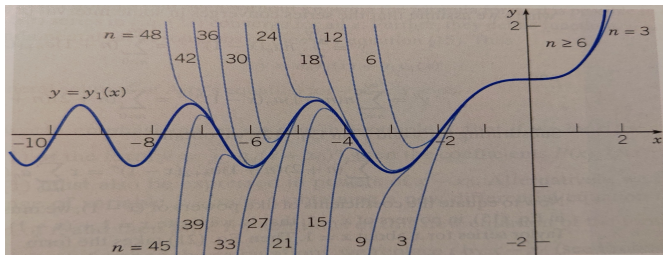


# Soluzioni dell'equazione di Airy



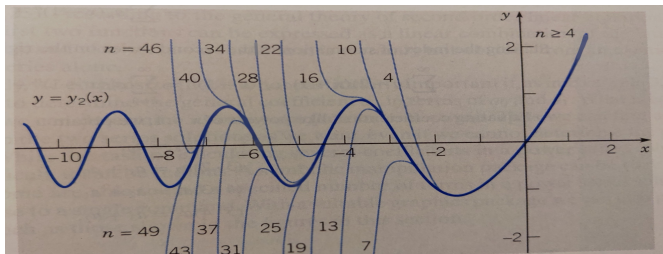
$$y_1(0) = 1$$

$$y_1'(0) = 0$$

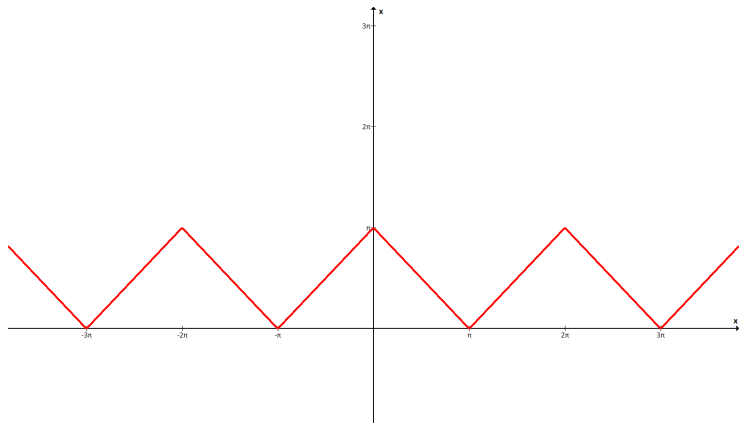


$$y_2(0) = 0$$

$$y_2'(0) = 1$$

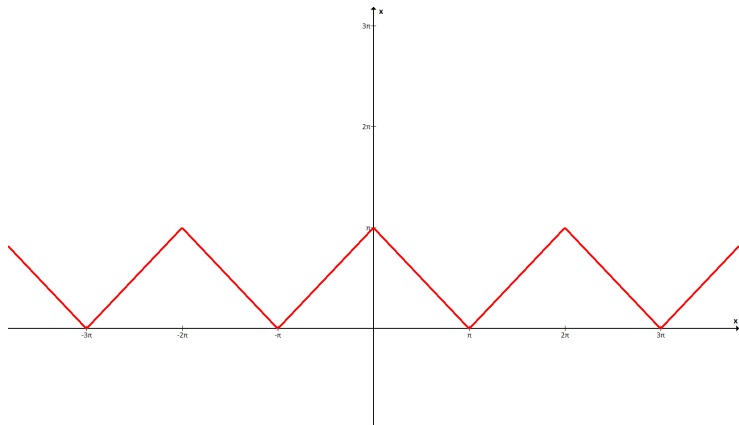


## Grafico di $f$

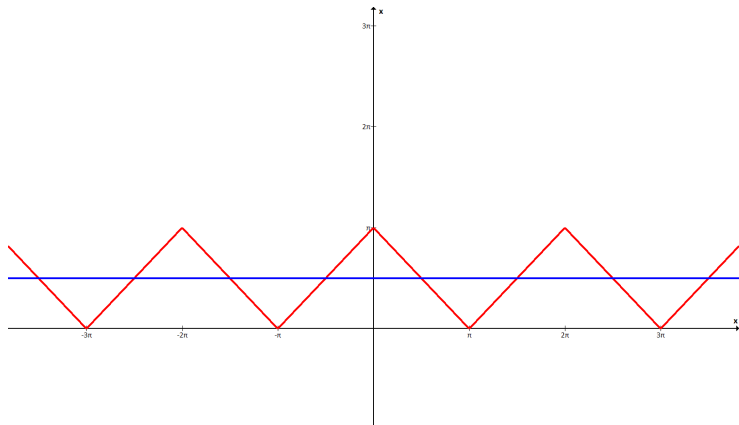


Nota: questa  $f$  è ottenuta dalla funzione dell'esempio ③ mediante una traslazione orizzontale di ampiezza  $\pi$ ; i suoi polinomi di Fourier si ottengono dai polinomi di Fourier della funzione dell'esempio ③ mediante la stessa traslazione, per cui il coefficiente  $a_0$  rimane lo stesso, mentre i coefficienti  $a_n$  con  $n \geq 1$  si trasformano negli opposti.

# Grafico di $\tilde{f}$

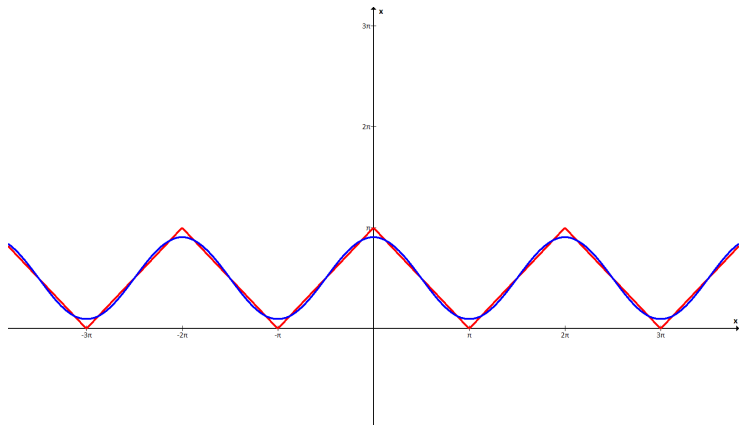


## Grafico di $f$ e di $F_0$



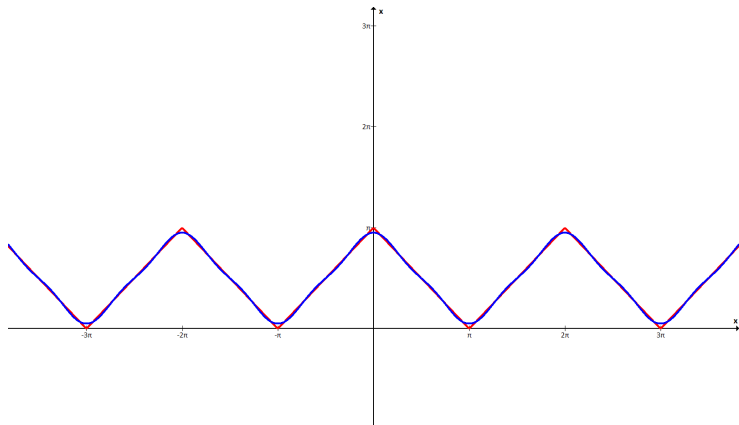
$$F_0(x) = \frac{\pi}{2}$$

## Grafico di $f$ e di $F_1$



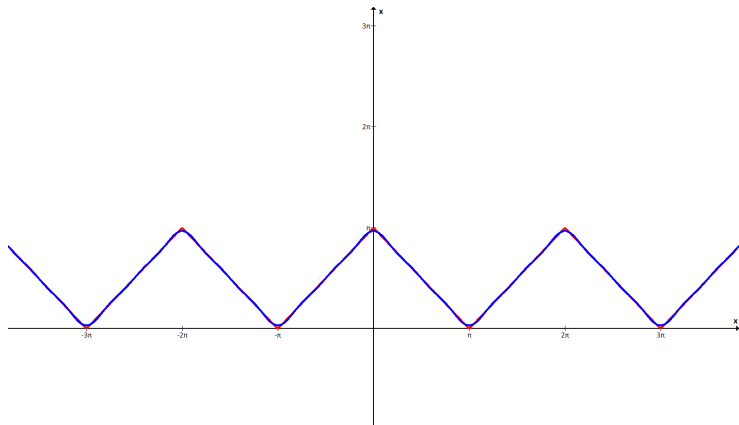
$$F_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos(x)$$

## Grafico di $f$ e di $F_3$



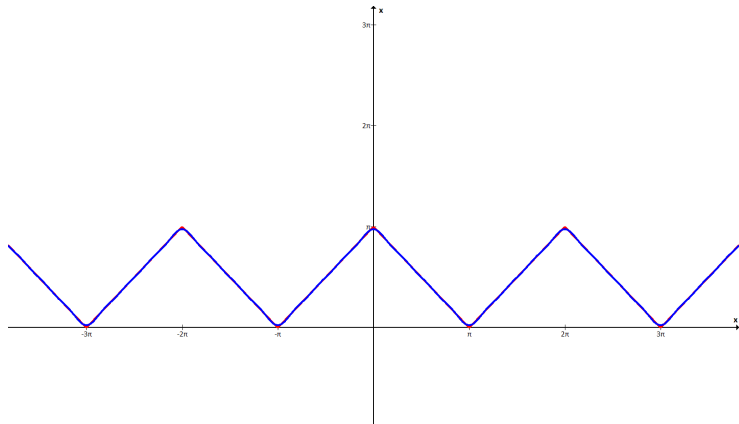
$$F_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} \right)$$

## Grafico di $f$ e di $F_5$



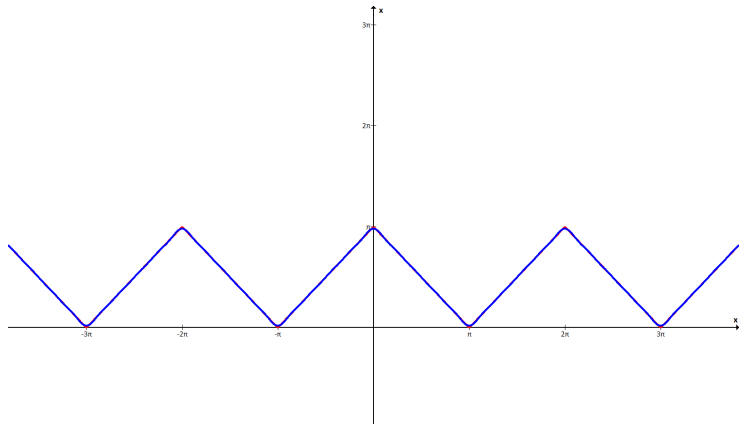
$$F_5(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} \right)$$

## Grafico di $f$ e di $F_7$



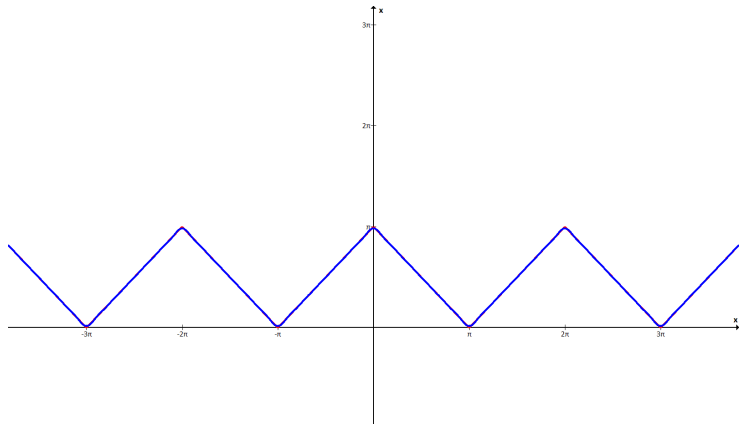
$$F_7(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots + \frac{\cos(7x)}{49} \right)$$

## Grafico di $f$ e di $F_9$



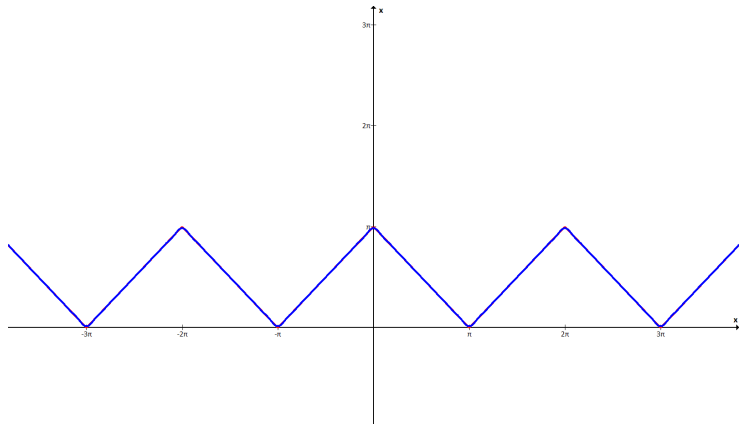
$$F_9(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots + \frac{\cos(9x)}{81} \right)$$

## Grafico di $f$ e di $F_{11}$



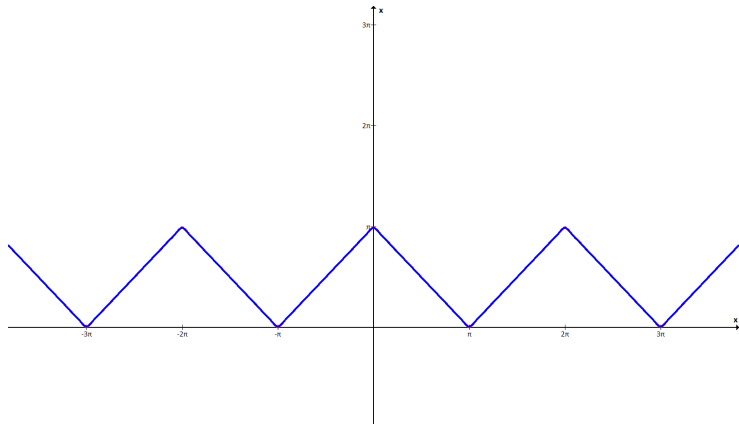
$$F_{11}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots + \frac{\cos(11x)}{121} \right)$$

## Grafico di $f$ e di $F_{13}$



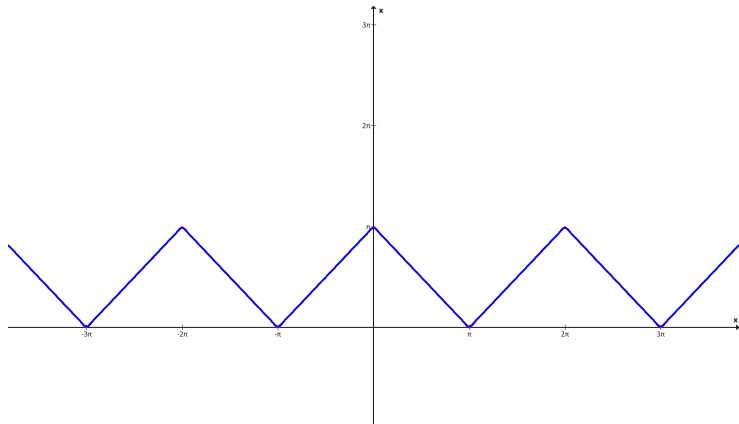
$$F_{13}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots + \frac{\cos(13x)}{169} \right)$$

## Grafico di $f$ e di $F_{15}$



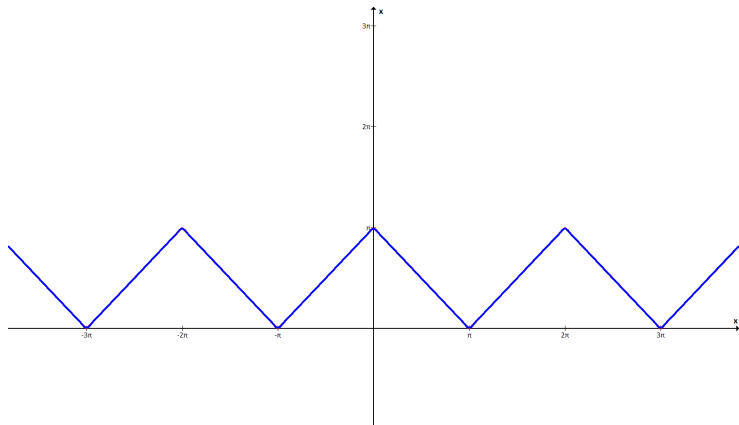
$$F_{15}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots + \frac{\cos(15x)}{225} \right)$$

## Grafico di $f$ e di $F_{17}$



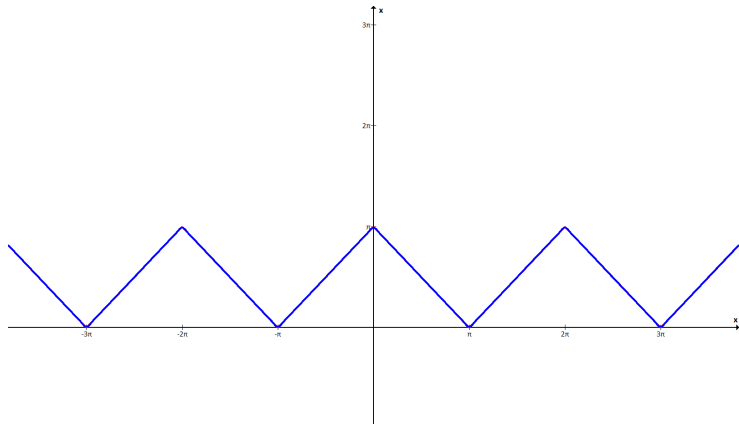
$$F_{17}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots + \frac{\cos(17x)}{289} \right)$$

## Grafico di $f$ e di $F_{19}$



$$F_{19}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots + \frac{\cos(19x)}{361} \right)$$

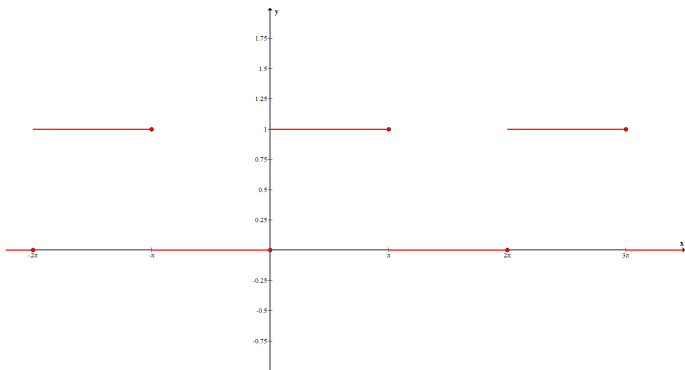
## Grafico di $f$ e di $F_{19}$



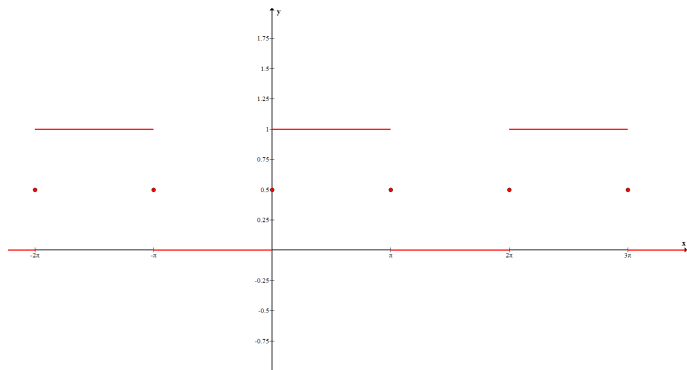
$$F_{19}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots + \frac{\cos(19x)}{361} \right)$$



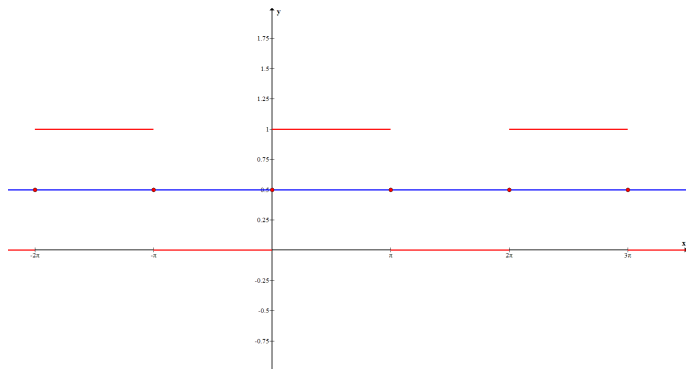
## Grafico di $f$



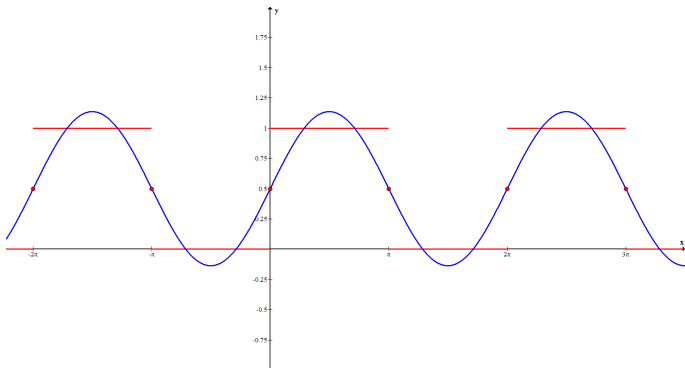
## Grafico di $\tilde{f}$



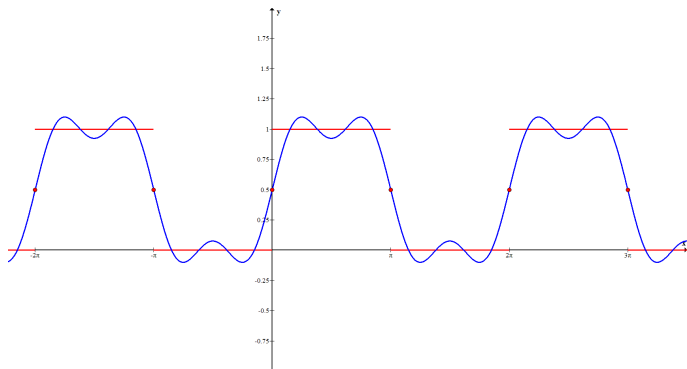
## Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_0$



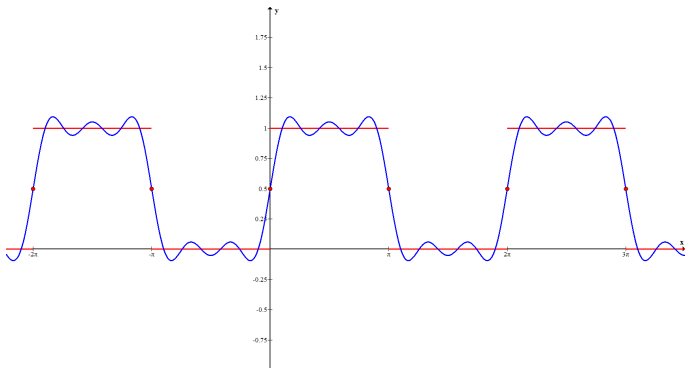
## Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_1$



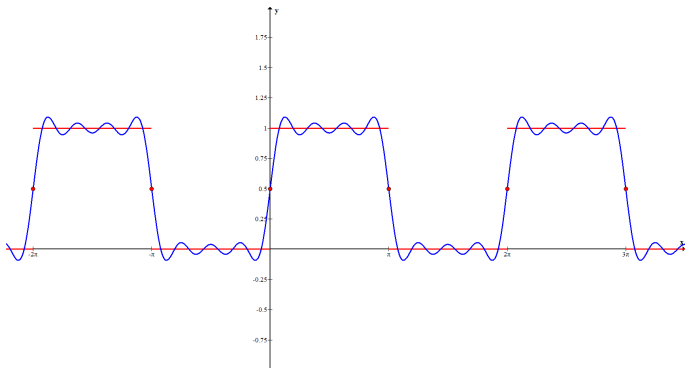
## Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_3$



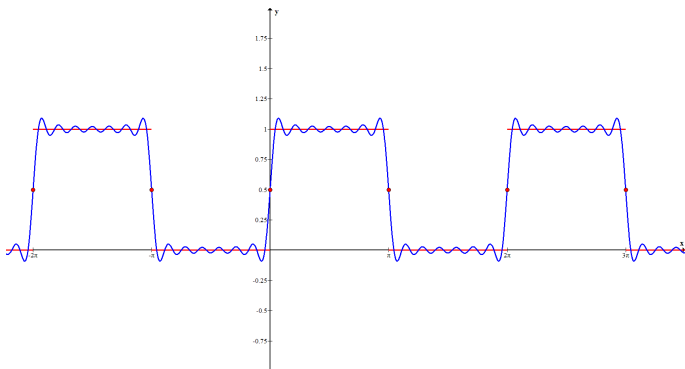
## Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_5$



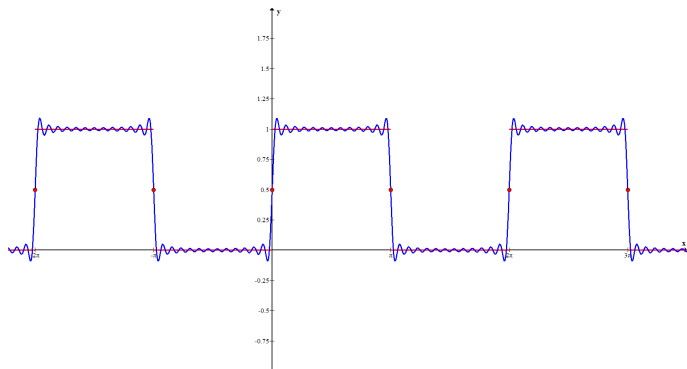
## Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_7$



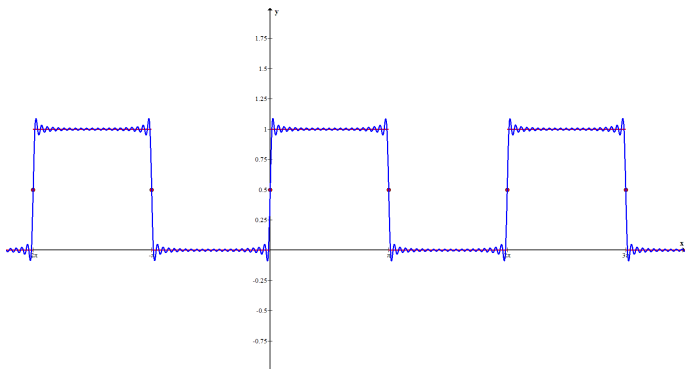
# Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_{13}$



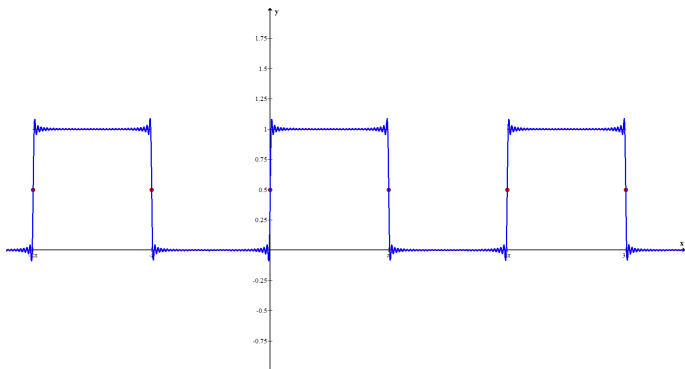
# Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_{25}$



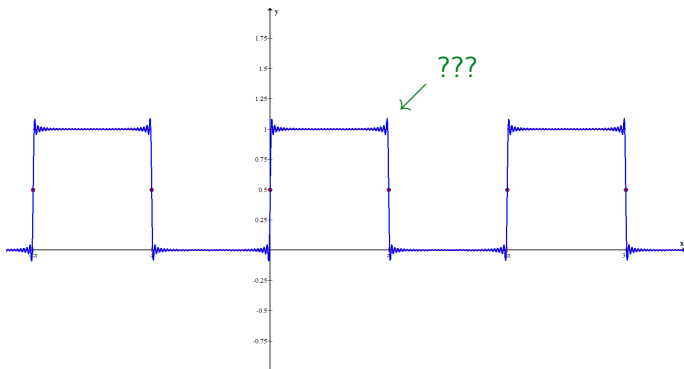
# Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_{41}$



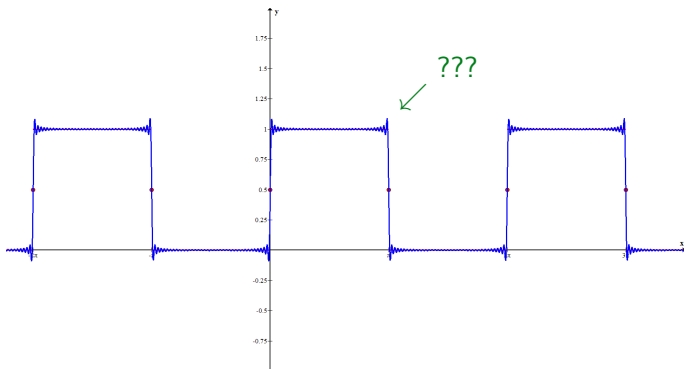
# Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_{75}$



# Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_{75}$

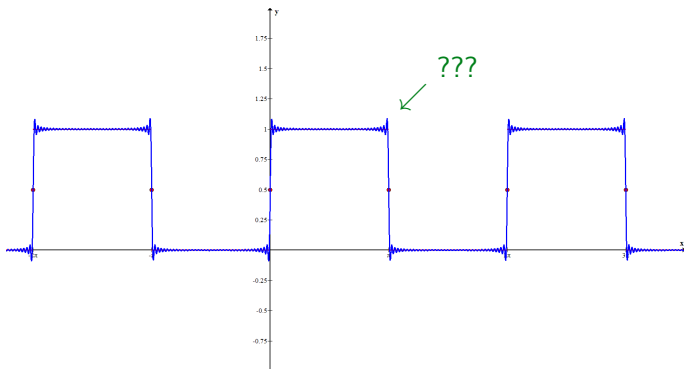


## Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_{75}$



In prossimità dei punti di discontinuità, l'oscillazione di  $F_n$  è **maggiore** del salto di  $f$ ; si può dimostrare che la prima grandezza è maggiore di circa il 18% rispetto alla seconda.

## Grafico di $\tilde{f}$ e di $F_{75}$



In prossimità dei punti di discontinuità, l'oscillazione di  $F_n$  è **maggiore** del salto di  $f$ ; si può dimostrare che la prima grandezza è maggiore di circa il 18% rispetto alla seconda.

Questo comportamento si osserva in generale, cioè per qualsiasi funzione con punti di discontinuità; viene chiamato **fenomeno di Gibbs**. ◀