

a.a. 2023/2024

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica III

Spazi metrici

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online;
non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Spazi metrici

Sia X un insieme qualsiasi (non vuoto). Una **metrica** o **distanza** in X è una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ soddisfacente le seguenti proprietà:

D1 $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;

D2 $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;

D3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.

disuguaglianza
triangolare

La coppia (X, d) si chiama **spazio metrico**; X si chiama **sostegno** dello spazio metrico.

Esempi

- \mathbb{R}^n con **metrica euclidea** ← introdotta in AM II

(per $n = 1$: metrica del valore assoluto)

- In un insieme qualsiasi X : $d_{DIS}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$ **metrica discreta**

Osservazione

Utilizzando la disuguaglianza triangolare si ottiene facilmente la **seconda disuguaglianza triangolare**:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \quad \text{per ogni } x, y, z \in X.$$

► Verifica ...

Osservazione

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$.

Sia d^A la **restrizione** della metrica d all'insieme $A \times A$.

- La funzione d^A è una metrica in A , detta **metrica indotta in A** .
- La coppia (A, d^A) è uno spazio metrico, che chiamiamo **sottospazio metrico** di (X, d) .

Elementi di topologia in uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $x_0 \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.

L'insieme

$$B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

si chiama **intorno sferico (o palla)** di centro x_0 e raggio r .

Nota: la definizione è formalmente identica a quella data in \mathbb{R}^n .

Esempi

Descrivere gli intorni sferici in \mathbb{R} e in uno spazio metrico discreto.

↑ **Sottinteso: con la metrica del valore assoluto**

Osservazione (**proprietà di separazione**)

In qualsiasi spazio metrico, elementi distinti ammettono intorni disgiunti.

Verifica ...

Esattamente come abbiamo fatto nel corso di AM II per lo spazio metrico euclideo \mathbb{R}^n , partendo dalla nozione di intorno sferico possiamo introdurre le nozioni di

- punto interno, esterno, di frontiera, di accumulazione;
- interiore, frontiera, derivato, chiusura di un insieme;
- insieme aperto, insieme chiuso.

Formuliamole insieme ... 

Esempi

Identificare gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi in uno spazio metrico discreto.

Ovviamente, le proprietà sulle operazioni insiemistiche con insiemi aperti e con insiemi chiusi, viste nello spazio metrico \mathbb{R}^n , valgono in un generico spazio metrico (X, d) . Ricordiamole:

- 1 Un insieme $E \subset X$ è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso, ed è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto.
- 2 L'unione di una arbitraria famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto; l'intersezione di una arbitraria famiglia di insiemi chiusi è un insieme chiuso.
- 3 L'intersezione di una famiglia **finita** di insiemi aperti è un insieme aperto; l'unione di una famiglia **finita** di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

Nota (omessa in AM II)

↓ per inclusione

L'interiore di un insieme E è il **più grande** insieme **aperto** contenuto in E ;
la chiusura di un insieme E è il **più piccolo** insieme **chiuso** contenente E .

Esempi (da ricordare)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $x_0 \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'intorno sferico $B_r(x_0)$ è aperto.

Verificare per esercizio utilizzando la disuguaglianza triangolare.

- L'insieme $\{x \in X \mid d(x, x_0) > r\}$ è aperto.

Verificare per esercizio utilizzando la seconda disuguaglianza triangolare.

- L'insieme $\{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ è chiuso.

↑ =: $\overline{B}_r(x_0)$ intorno sferico chiuso (o palla chiusa)

- Gli insiemi $\{x \in X \mid d(x, x_0) \geq r\}$ e $\{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ sono chiusi.

↑ =: $S_r(x_0)$ sfera

Osservazione

Nello spazio metrico euclideo: $S_r(x_0) = \partial B_r(x_0)$; in uno spazio metrico generico, l'uguaglianza non è garantita. **Esempio ...**

Insiemi limitati

Ricordiamo la definizione data nel corso di AM II ... 

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$.

Diciamo che E è **limitato** se esiste una palla (chiusa) che contiene E ,
cioè se **esistono** $\bar{x} \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ tali che $d(x, \bar{x}) \leq r$ per ogni $x \in E$.

Osservazioni

- Gli intorni sferici sono limitati.
- La chiusura e la frontiera di un insieme limitato sono insiemi limitati.
- In uno spazio metrico discreto, tutti gli insiemi sono limitati.

Lo spazio funzionale $B(X, Y)$

Sia X un insieme e sia (Y, d_Y) uno spazio metrico.

Diciamo che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **limitata** se la sua immagine $f(X)$ è un insieme limitato nello spazio metrico (Y, d_Y) .

In simboli:

esistono $\bar{y} \in Y$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ tali che $d_Y(f(x), \bar{y}) \leq r$ per ogni $x \in X$.

Definiamo l'insieme

$$B(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ è limitata}\}$$

e la funzione $d_\infty : B(X, Y) \times B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tale che

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \quad \text{per ogni } f, g \in B(X, Y).$$

Proposizione

Sia X un insieme e sia (Y, d_Y) uno spazio metrico.

- 1 La funzione d_∞ è ben posta.
- 2 La funzione d_∞ è una metrica. metrica dell'estremo superiore
- 3 $(B(X, Y), d_\infty)$ è uno spazio metrico.

Verifica ...

Come si interpreta graficamente la distanza d_∞ per funzioni reali di variabile reale? Cosa sono gli intorni?

Lo spazio funzionale $C_b(X, Y)$

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Sia $\bar{x} \in X$.

Diciamo che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **continua in \bar{x}** se è soddisfatta una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

- (a) per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esiste $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tale che per ogni $x \in X$ tale che $d_X(x, \bar{x}) < \delta$ risulta $d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$;
- (b) per ogni intorno V di $f(\bar{x})$ nello spazio metrico (Y, d_Y) esiste un intorno U di \bar{x} nello spazio metrico (X, d_X) tale che $f(U) \subseteq V$.

Se $A \subseteq X$, diciamo che è **f continua in A** se è continua in ogni punto di A ; diciamo che f è **continua** se è continua in X .

Esempio

Siano (X, d_X) uno spazio metrico e $\tilde{x} \in X$.

La funzione $x \in X \mapsto d_X(x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}$ è continua.

segue dalla seconda
disuguaglianza triangolare

Definiamo gli insiemi

$$C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ è continua}\}$$

e

$$C_b(X, Y) := B(X, Y) \cap C(X, Y).$$

Dato che $C_b(X, Y)$ è un sottoinsieme di $B(X, Y)$, possiamo munirlo della metrica indotta da d_∞ , che denotiamo con lo stesso simbolo.

Otteniamo così $(C_b(X, Y), d_\infty)$, sottospazio metrico di $(B(X, Y), d_\infty)$.

Osservazione

Gli insiemi $C_b(X, Y)$ e $C(X, Y)$ coincidono se **tutte** le funzioni continue da X in Y sono anche limitate.

Per esempio, se $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$: $C_b([a, b], \mathbb{R}) = C([a, b], \mathbb{R})$.

Metriche alternative a d_∞ in $C([a, b], \mathbb{R}) \dots$

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di X .

Diciamo che $\{x_n\}$ converge nello spazio metrico (X, d) se esiste $x \in X$ soddisfacente una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0$

definizione
metrica

(b) per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ risulta $d(x_n, x) < \varepsilon$ definitivamente

“traduzione”
di (a)

(c) ogni intorno di x contiene x_k definitivamente.

definizione
topologica

In tal caso, diciamo che $\{x_n\}$ converge a x , oppure che x è il limite di $\{x_n\}$, e scriviamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ oppure $x_n \rightarrow x$.

Osservazione (unicità del limite) \leftarrow segue dalla proprietà di separazione

Una successione non può convergere a due limiti distinti.

Proposizione in parte vista in AM II per lo spazio metrico euclideo

Siano (X, d) uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $x \in X$.

- 1 $x \in Dr(E)$ se e solo se esiste una successione di elementi di $E \setminus \{x\}$ convergente a x .
- 2 $x \in \bar{E}$ se e solo se esiste una successione di elementi di E convergente a x .
- 3 E è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le successioni di elementi di E che convergono in (X, d) . Esplicitare ...

Dimostrazione ...

Esempio (da ricordare!)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Allora:

$C_b(X, Y)$ è un sottoinsieme chiuso nello spazio metrico $(B(X, Y), d_\infty)$.

Dimostrazione ...

Proposizione (caratterizzazione sequenziale della continuità)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \rightarrow Y$. Sia $x \in X$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a) f è continua in x ;
- (b) per ogni successione $\{x_n\}$ convergente a x in (X, d_X) , la successione trasformata $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$ in (Y, d_Y) .

(presa come definizione in AM II per funzioni tra spazi metrici euclidei)

Verifica ...

Esempio

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $\tilde{x} \in X$.

Sia $x \in X$ e sia $\{x_n\}$ una successione convergente a x in (X, d_X) .

Allora: $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, \tilde{x}) = d(x, \tilde{x})$.

Osservazione (convergenza nei sottospazi)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $A \subset X$ e sia d^A la metrica indotta.

- Ogni successione di elementi di A che converge in (A, d^A) converge anche in (X, d) (al medesimo limite).
- Se una successione di elementi di A converge in (X, d) , allora essa converge in (A, d^A) se e solo se il suo limite appartiene a A .

Esempio:

$$X = \mathbb{R}, A = (0, 2], \left\{2 - \frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

- Se A è **chiuso** in (X, d) , allora una successione di elementi di A converge in (A, d^A) se e solo se converge in (X, d) .

Esempio ...

Successioni di Cauchy e spazi metrici completi

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di X .

Diciamo che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy nello spazio metrico (X, d)

se

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

cioè

per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ risulta $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ definitivamente.

Proposizione (proprietà delle successioni di Cauchy)

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy nello spazio metrico (X, d) . Allora:

- 1 $\{x_n\}$ è limitata;
- 2 se esiste una successione estratta da $\{x_n\}$ convergente a un certo x , anche $\{x_n\}$ converge a x .

Dimostrazione . . .

Osservazione

In un qualsiasi spazio metrico, ogni successione convergente è anche una successione di Cauchy. *Motivazione . . .*

Il viceversa non è vero in generale. *Esempio...*

Se in uno spazio metrico **tutte le successioni di Cauchy sono anche convergenti**, diciamo che lo spazio metrico è **completo**.

Teorema (completezza dello spazio metrico euclideo)

- 1 \mathbb{R} è completo rispetto alla metrica del valore assoluto.
- 2 Per $n \geq 2$, \mathbb{R}^n è completo rispetto alla metrica euclidea.

Dimostrazione . . .

Commento sulle nozioni di “completezza di \mathbb{R} ” viste in precedenza . . .

Nota

Ogni spazio metrico discreto è completo. Giustificare ...

Teorema (completezza di $B(X, Y)$)

Siano X un insieme e (Y, d_Y) è uno spazio metrico completo.

Allora: $(B(X, Y), d_\infty)$ è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione ... più avanti

E $C_b(X, Y)$?

Proposizione (chiusura e completezza)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $A \subset X$ e sia d^A la metrica indotta.

- 1 Se (A, d^A) è completo, allora A è chiuso in (X, d) .
- 2 Se (X, d) è completo e A è chiuso in (X, d) , allora:
 (A, d^A) è completo.

Dimostrazione ...

Nota

Dal punto ❶ della proposizione precedente segue che \mathbb{Q} , munito della metrica del valore assoluto, non è uno spazio metrico completo.

Teorema (completezza di $C_b(X, Y)$)

Siano (X, d_X) uno spazio metrico e (Y, d_Y) uno spazio metrico completo.

Allora: $(C_b(X, Y), d_\infty)$ è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione

Basta osservare che $(B(X, Y), d_\infty)$ è completo e che $C_b(X, Y)$ è chiuso in $(B(X, Y), d_\infty)$. \square

Nota

L'insieme $C([a, b], \mathbb{R})$, munito delle “metriche integrali”, non è uno spazio metrico completo. Ecco perché preferiamo $d_\infty \dots$

Una applicazione della completezza

Teorema (delle contrazioni o di Banach-Caccioppoli)

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f : X \rightarrow X$.

Supponiamo che esista $\alpha \in]0, 1[$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

Allora: esiste uno e un solo $x \in X$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione ...

Note

Una funzione che soddisfa l'ipotesi del teorema si chiama **contrazione**; è evidente che è una funzione continua.

Un elemento x che soddisfa la tesi del teorema si chiama **punto fisso** di f .

La dimostrazione fornisce un procedimento costruttivo per **approssimare** l'unico punto fisso della contrazione.

Spazi metrici (sequenzialmente) compatti

Diciamo che uno spazio metrico (X, d) è **(sequenzialmente) compatto** se da ogni successione di elementi di X si può estrarre una sottosuccessione convergente in (X, d) .

Sia $A \subset X$. Diciamo che A è un **sottoinsieme compatto** di X se il sottospazio metrico (A, d^A) è compatto. **Esplicitare ...**

Proposizione (**compattezza, chiusura e limitatezza**)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $A \subseteq X$.

- 1 Se A è compatto, allora A è **limitato** in (X, d) .
- 2 Se A è compatto, allora il sottospazio metrico (A, d_A) è completo e quindi A è **chiuso** in (X, d) .
- 3 Se (X, d) è compatto e A è **chiuso** in (X, d) , allora A è compatto.

Dimostrazione ...

Osservazione

Dai punti ❶ e ❷ della proposizione precedente segue che in qualsiasi spazio metrico (X, d) tutti i sottoinsiemi compatti sono **chiusi e limitati**.

Il viceversa è vero nello spazio metrico euclideo \mathbb{R}^n (**teorema di Heine-Borel**, visto in AM II), ma non è vero in generale.

Esempi

- Come già osservato, in uno spazio metrico discreto tutti gli insiemi sono sia chiusi che limitati; tuttavia, essi sono compatti se e solo se sono finiti. **Giustificare ...**
- Nello spazio metrico $C([0, 1], \mathbb{R}, d_\infty)$, la palla chiusa di centro la funzione costante di valore 0 e raggio 1 è un insieme chiuso e limitato che non è compatto.

Verifica ...

Nota

Anche per funzioni continue tra generici spazi metrici valgono i teoremi di Weierstrass e Cantor, che ci limitiamo a enunciare:

Teorema di Weierstrass

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione **continua**.

Se X è **compatto**, allora $f(X)$ è **compatto**.

Teorema di Cantor

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione **continua**.

Se X è **compatto**, allora f è **uniformemente continua**, cioè:

per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esiste $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tale che per ogni $x, y \in X$ tale che $d_X(x, y) < \delta$ risulta $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Particolari spazi metrici: spazi normati

Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (o su \mathbb{C}). Una **norma** in X è una funzione $N : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ soddisfacente le seguenti proprietà:

N1 $N(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;

N2 $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\lambda \in \mathbb{C}$) e $x \in X$;

N3 $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ per ogni $x, y \in X$. **disuguaglianza triangolare**

Di solito si utilizza la notazione $\|x\|$ invece di $N(x)$; la coppia $(X, \|\cdot\|)$ si chiama **spazio normato**.

Esempi

- \mathbb{R} con valore assoluto
- \mathbb{R}^n con la “norma euclidea”, ma anche:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Osservazione

Sia $\|\cdot\|$ una norma nello spazio vettoriale X . La funzione

$$(x, y) \in X \times X \mapsto \|x - y\| \in \mathbb{R}_+$$

è una **metrica** in X , detta **metrica indotta dalla norma**.

La verifica si basa esclusivamente sulle proprietà **N1-N3**; è identica a quella fatta nella prima lezione per la metrica indotta in \mathbb{R}^n dalla norma euclidea.

Pertanto: ogni spazio normato è anche uno spazio metrico.

Uno spazio normato che risulti completo rispetto alla metrica indotta dalla norma viene chiamato **spazio di Banach**.

Esempi

- \mathbb{R} con valore assoluto
- \mathbb{R}^n con una qualsiasi delle tre norme considerate
norme “equivalenti” \rightarrow metriche equivalenti \rightarrow stessa topologia
intorni “sferici”?

Spazi funzionali normati

Sia X un insieme e sia Y uno spazio vettoriale.

Per $f, g : X \rightarrow Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definiamo

$$f + g := x \in X \mapsto f(x) + g(x) \in Y, \quad \lambda \cdot f := x \in X \mapsto \lambda \cdot f(x) \in Y.$$

Munito di queste operazioni, l'insieme $F(X, Y)$ di tutte le funzioni definite in X e a valori in Y è uno spazio vettoriale.

Supponiamo ora che $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sia uno spazio normato.

- $B(X, Y)$ è un sottospazio vettoriale di $F(X, Y)$; cosa vuol dire?
- l'applicazione $\|\cdot\|_\infty : B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita ponendo

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y \quad \text{per ogni } f \in B(X, Y).$$

è ben posta ed è una norma (detta **norma dell'estremo superiore**);

- $(B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato.

Osservazione sembra uno scioglilingua!

La metrica indotta in $B(X, Y)$ dalla norma dell'estremo superiore associata alla norma su Y coincide con la metrica dell'estremo superiore associata alla metrica su Y indotta dalla norma su Y .

Pertanto:

se $(Y, \|\cdot\|_Y)$ è uno spazio di Banach, anche $(B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ lo è.

Supponiamo che (X, d_X) sia uno spazio metrico.

- $C_b(X, Y)$ è un sottospazio vettoriale di $B(X, Y)$;
- $C_b(X, Y)$ “eredita” la norma $\|\cdot\|_\infty$;
- se $(Y, \|\cdot\|_Y)$ è uno spazio di Banach, anche $(C_b(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ lo è.

Esempio: $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è spazio di Banach

Serie in spazi normati

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato; sia d la metrica indotta dalla norma.

Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di X .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo la somma parziale n -esima associata a $\{x_n\}$ ponendo

$$S_n := \sum_{k=0}^n x_k.$$

La successione $\{S_n\}$ si chiama serie di termine x_n ; se converge in (X, d) ,

il suo limite si chiama somma della serie e si denota con $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Nota

Le definizioni date sono formalmente identiche a quelle relative alle serie numeriche; in un generico spazio normato si parla solo di serie convergenti oppure non convergenti.

Osservazione (criterio di Cauchy)

Consideriamo le affermazioni

(a) la serie di termine x_n converge,

(b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \nu$ e $k \geq 1$: $\|x_{n+1} + \dots + x_{n+k}\| < \varepsilon$.
 $\uparrow = \|S_{n+k} - S_n\|$

Notiamo che, per definizione:

(a) \iff la successione $\{S_n\}$ converge

(b) \iff la successione $\{S_n\}$ è di Cauchy

Pertanto:

- in qualsiasi spazio normato (a) implica (b);
- in uno spazio di Banach (a) e (b) sono equivalenti. Quindi?

Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $\{x_n\}$ una successione di elementi di X .

Diciamo che la serie di termine x_n **converge normalmente** se converge la serie numerica di termine $\|x_n\|$. Convergenza normale in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

Teorema (completezza e convergenza normale)

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a) lo spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è di Banach;
- (b) ogni serie normalmente convergente in $(X, \|\cdot\|)$ è convergente.

Dimostrazione di (a) \Rightarrow (b) ...

Negli spazi di Banach lo studio della convergenza di una serie può essere ricondotta allo studio di una serie a termini reali non negativi.

Cenno: spazi di Hilbert ...

APPENDICE
(VERIFICHE, RICHIAMI, ...)

Verifica della seconda disuguaglianza triangolare

Fisso x, y, z . Per la disuguaglianza triangolare:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y);$$

portando a primo membro:

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) (= d(y, z));$$

scambiando y e z :

$$d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z);$$

moltiplicando per -1 :

$$d(x, y) - d(x, z) \geq -d(y, z).$$

Mettendo insieme le disuguaglianze colorate:

$$-d(y, z) \leq d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z),$$

da cui

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$



Nozioni topologiche in uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Sia $\bar{x} \in X$.

Diciamo che \bar{x} è

- **punto interno** a E se esiste un intorno sferico di \bar{x} contenuto in E ;
- **punto esterno** a E se è interno a E^c (complementare di E), cioè se esiste un intorno sferico di \bar{x} contenuto in E^c ;
- **punto di frontiera** per E se non è né interno né esterno a E , cioè se ogni intorno sferico di \bar{x} contiene sia punti di E che punti di E^c ;
- **punto di accumulazione** per E se ogni intorno di \bar{x} contiene almeno un elemento di E diverso da \bar{x} . ← Superfluo se $\bar{x} \notin E$.

Chiamiamo

- **interiore** o **interno di E** l'insieme dei punti interni a E , denotato con $\text{int}(E)$ (oppure $\overset{\circ}{E}$);
- **frontiera di E** l'insieme dei punti di frontiera per E , denotato con ∂E ;
- **derivato di E** l'insieme dei punti di accumulazione per E , denotato con $D_r(E)$;
- **chiusura di E** l'insieme $E \cup D_r(E)$, denotato con \overline{E} .

Naturalmente valgono le medesime osservazioni fatte in \mathbb{R}^n .

Per esempio:

- E e il suo complementare E^c hanno la stessa frontiera;
- $\text{int}(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}$;
- gli insiemi E , $D_r(E)$, ∂E non sono confrontabili per inclusione;
- $E \cup \partial E = \overline{E}$.

Diciamo che E è un insieme **aperto** se è soddisfatta una qualsiasi delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

- (a) tutti gli elementi di E sono punti interni a E
- (b) $\text{int}(E) = E$
- (c) $E \cap \partial E = \emptyset$

Diciamo che E è un insieme **chiuso** se è soddisfatta una qualsiasi delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

- (a) $D_r(E) \subseteq E$
- (b) $\bar{E} = E$
- (c) $\partial E \subseteq E$

Richiamo di AM II: insiemi limitati in \mathbb{R}^n

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diciamo che E è **limitato** se è soddisfatta una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

- (a) esiste $M \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $\|\mathbf{x}\| \leq M$ per ogni $\mathbf{x} \in E$;
- (b) esiste una palla (chiusa) di centro $\mathbf{0}$ che contiene E ;
- (c) esiste una palla (chiusa) che contiene E .

Queste proprietà hanno senso in un generico spazio metrico?



Richiamo di AM II: successioni convergenti in \mathbb{R}^n

Siano $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).

Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, denotiamo con $x_{k,i}$ e x_i la i -esima componente di \mathbf{x}_k e di \mathbf{x} , rispettivamente.

Diciamo che $\{\mathbf{x}_k\}$ converge a \mathbf{x} se è soddisfatta una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

(a) ogni intorno sferico di \mathbf{x} contiene \mathbf{x}_k definitivamente

$$(b) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0 \quad \iff \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) = 0$$

(c) per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, la successione di numeri reali $\{x_{k,i}\}$ converge a x_i .

Queste proprietà hanno senso in un generico spazio metrico?

