sono punti stazionari per la funzione (di $n+m$ variabili)

$$H(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_m F_m(x_1, \dots, x_n).$$

Esempio ~~*7.4*~~

Consideriamo di nuovo il problema dell'esempio 7.2; si tratta di trovare il minimo della funzione

$$f(x, y) = mgy + \frac{1}{2} k\{(x-1)^2 + y^2\},$$

con il vincolo

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

In questo caso il sistema [7.5] diventa

$$\begin{cases} k(x-1) + 2\lambda y = 0 \\ mg + ky + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \qquad [7.6]$$

Dalle prime due equazioni si ricava

$$x = k/(k+2\lambda), \qquad y = -mg/(k+2\lambda),$$

e, introducendo questi valori nella terza,

$$(k+2\lambda)^2 = k^2 + m^2 g^2.$$

Le soluzioni del sistema [7.6] sono allora i punti

$$P_1 = (k/\sqrt{k^2 + m^2 g^2}, \quad -mg/\sqrt{k^2 + m^2 g^2})$$

$$P_2 = -P_1 = (-k/\sqrt{k^2 + m^2 g^2}, \quad mg/\sqrt{k^2 + m^2 g^2}).$$

Calcolando i valori della funzione f nei punti P_1 e P_2 si conclude che P_1 è un punto di minimo e P_2 di massimo vincolato. ■

Esempio 7.5

Si trovino le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo, senza coperchio, che ha volume massimo, se l'area della sua superficie è 12 (vedi fig. 7.16).

Si tratta di minimizzare la funzione

$$f(x, y, z) = xyz,$$

con la condizione

$$xy + 2xz + 2yz = 12.$$

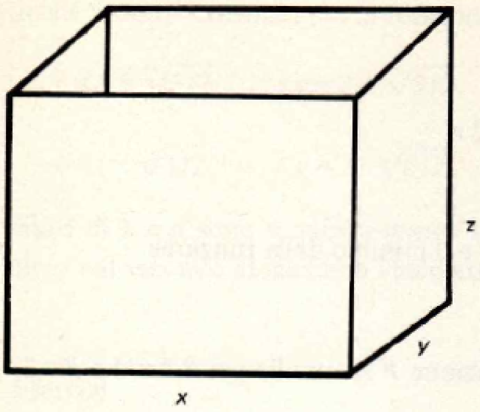

Figura 7.16

Il corrispondente sistema è

$$\begin{cases} yz + \lambda y + 2\lambda z = 0 \\ xz + \lambda x + 2\lambda z = 0 \\ xy + 2\lambda x + 2\lambda y = 0 \\ xy + 2xz + 2yz = 12, \end{cases}$$

che risolto dà

$$\begin{cases} x = y = 2, \quad z = 1, \qquad \lambda = -1/2 \\ x = y = -2, \quad z = -1, \qquad \lambda = 1/2. \end{cases}$$

La prima soluzione dà evidentemente il massimo cercato. ■

Esempio 7.6

Si trovi il valore massimo e il valore minimo della funzione

$$f(x, y, z) = x + 3y - z,$$

nell'insieme G definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ z = 2x + 4y. \end{cases} \qquad [7.7]$$

Primo metodo. Cerchiamo una rappresentazione parametrica di G. Eliminando z dalle [7.7] si ottiene

$$x^2 + y^2 = 2x + 4y,$$

da cui

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5,$$

cosicché G ha equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= 1+\sqrt{5}\cos\theta \\ y &= 2+\sqrt{5}\sin\theta \qquad\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ z &= 10+2\sqrt{5}(\cos\theta+2\sin\theta). \end{aligned}$$

Occorrerà in definitiva trovare il massimo e il minimo della funzione

$$F(\theta)=-3-\sqrt{5}(\cos\theta+\sin\theta)$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$. La derivata della funzione F si annulla per $\theta=\pi/4$ e $\theta=5\pi/4$. Si ha

$$F(\pi/4)=-3-\sqrt{10}, \qquad F(5\pi/4)=-3+\sqrt{10}$$

e inoltre

$$F(0)=F(2\pi)=-3-\sqrt{5},$$

cosicché il massimo per f è $-3+\sqrt{10}$, assunto nel punto di coordinate $(1-\sqrt{5/2}, 2-\sqrt{5/2}, 10-6\sqrt{5/2})$, mentre il massimo è $-3-\sqrt{10}$, assunto nel punto $(1+\sqrt{5/2}, 2+\sqrt{5/2}, 10+6\sqrt{5/2})$.

Secondo metodo. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si cercheranno i punti stazionari per la funzione (di cinque variabili)

$$x+3y-z+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(z-2x-4y),$$

cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1+2\lambda x-2\mu=0 \\ 3+2\lambda y-4\mu=0 \\ -1-\lambda+\mu=0 \\ x^2+y^2=z \\ 2x+4y=z. \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni si ricava $\mu=1+\lambda$, e

$$x=(1+2\lambda)/2\lambda, \qquad y=(1+4\lambda)/2\lambda.$$

Introducendo tali valori di x e y nell'equazione

$$x^2+y^2=2x+4y,$$

si ottiene un'equazione in λ, che ha come soluzioni

$$\lambda=\pm 1/\sqrt{10},$$

cosicché i punti stazionari per la funzione considerata saranno

$$x=1+\sqrt{5/2}, \qquad y=2+\sqrt{5/2}, \qquad z=10+6\sqrt{5/2}$$

e

$$x=1-\sqrt{5/2}, \qquad y=2-\sqrt{5/2}, \qquad z=10-6\sqrt{5/2}$$

(i valori di λ e μ sono a questo punto senza importanza), corrispondenti il primo al minimo e il secondo al massimo vincolato della funzione. ■

Esercizi

7.1 Trovare il minimo delle funzioni seguenti, con i vincoli indicati a lato di ciascuna di esse:

(a) $x^2+y^2+z^2$, $\quad x+3y-2z=4$
(b) $3x^2+2y^2+4z^2$, $\quad 2x+4y-6z+5=0$
(c) $x^2+y^2+z^2$, $\quad x+2y+z-1=0$ e $2x-y-3z-4=0$
(d) $x^2+y^2+z^2+t^2$, $\quad x+y-z+2t=2$ e $2x-y+z+3t=3$
(e) $2x^2+y^2+z^2$, $\quad x^2yz=1$,

7.2 Una tenda è della forma di un cilindro sormontato da un cono (vedi fig. 7.17). Se la base del cilindro ha diametro 10 e la superficie totale è 100, si trovi l'altezza H del cilindro e quella h del cono in modo che il volume sia massimo.

7.3 Sia $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un vettore di $\mathbf{R}^n$. Si trovi il massimo del prodotto scalare

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

sulla sfera unitaria

$$S=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n : x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}.$$

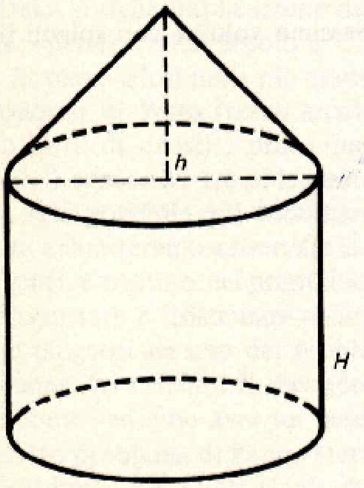

Figura 7.17