

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica II**

23 aprile 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 5y = t e^{2t} + 4 \cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

2. Si consideri la funzione definita ponendo $f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2 - 1}$.

- (a) Si determini il dominio di f e se ne descrivano le proprietà (aperto, chiuso, convesso, connesso, limitato, compatto).
- (b) Si studino i limiti significativi di f .

3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x, y) = |x - y| (x^2 + y^2 - 2).$$

- (a) Si studi la differenziabilità di f .
- (b) Si calcoli la derivata di f nel punto $(1, -1)$ nella direzione $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
- (c) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica II**

10 giugno 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determinino gli estremi locali della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x, y) = e^{-|x|} (2xy + y^2).$$

2. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (xy, x + z, x^2 z)$$

uscente attraverso la frontiera del sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dalla superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dai piani di equazione $z = 1$ e $z = 4$.

Si verifichi mediante il teorema della divergenza la correttezza del risultato ottenuto.

3. Si consideri la curva di parametrizzazione $r(t) = (t(t-1)(2-t), 1-|t-1|)$, $t \in [0, 2]$.

- (a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa e se ne disegni approssimativamente il sostegno.
- (b) Si calcoli l'area del dominio regolare delimitato dal sostegno della curva.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 10 giugno 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - y' - 2y = (9t^2 + t)e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

2. Data la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x, y) = e^{-|x|}(2xy + y^2),$$

- (a) se ne studi la differenziabilità;
- (b) se ne determinino gli estremi locali.

3. Si consideri la curva di parametrizzazione $r(t) = (t(t-1)(2-t), 1-|t-1|)$, $t \in [0, 2]$.

- (a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa e se ne disegni approssimativamente il sostegno.
- (b) Si calcoli l'area del dominio regolare delimitato dal sostegno della curva.

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (xy, x + z, x^2z)$$

uscente attraverso la frontiera del sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dalla superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dai piani di equazione $z = 1$ e $z = 4$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 24 giugno 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y = t e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

2. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

- (a) Si determinino e classifichino i punti stazionari di f .
(b) Si determinino gli estremi globali di f nel triangolo di vertici $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$.

3. Si calcoli il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (xy, x + z, x^2 z)$$

entrante nella porzione della superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ delimitata dai piani di equazione $z = 1$ e $z = 4$.

4. Si calcoli l'integrale del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

sulla curva grafico associata alla funzione definita ponendo $g(x) = 1 - x^2$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 2 \cos t + t \sin t.$$

2. Si consideri la funzione definita ponendo

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Si studi la differenziabilità di f .
- (b) Si determinino e classifichino i punti stazionari di f .
3. Si calcoli l'integrale triplo della funzione definita ponendo $f(x, y, z) = x y$ nella regione dello spazio, contenuta nel primo ottante, delimitata dal piano di equazione $x + y + z = 1$ e dal paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$.

Nota: a seconda della formula di riduzione utilizzata per il calcolo dell'integrale, può essere utile tenere presente l'uguaglianza

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t + \sin t}{(\cos t + \sin t)^4} dt = \frac{1}{6}.$$

4. Sia Σ la porzione della sfera di equazione di centro l'origine e raggio 3 posta al di sopra del piano di equazione $z = 1$. Si calcoli il flusso che attraversa Σ dall'alto verso il basso del rotore del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^2 y, y z, 3 y^2)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 9 settembre 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y' - 6y = 2e^{3t} + 1.$$

2. Si determinino gli estremi locali della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = y(x^2 - 1) - |x|y^2$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Si calcoli il volume del solido delimitato dai paraboloidi di equazione $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

4. Sia Σ la porzione del piano di equazione $x + y + 2z = 2$ contenuta nel primo ottante. Si calcoli il flusso che attraversa Σ dal basso verso l'alto del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y^4 z - y^2, y - x^3, z^2).$$

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 5y = e^t \sin(2t).$$

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Si calcoli l'integrale del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}, -\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} \right) \right)$$

sul segmento congiungente i punti di coordinate $(1, 3)$ e $(4, 1)$.

4. Sia T la porzione del cilindro di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$ delimitata dal piano di equazione $z = 0$ e dal paraboloide di equazione $z = 3 - x^2 - y^2$.

Si calcoli il flusso uscente attraverso la frontiera di T del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (2xy, x^2, z^2).$$

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' - 3y = 2e^t + te^{2t}.$$

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = x(e^x - y^2)^2$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Si stabilisca se il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (ye^x - e^y, e^x - xe^y, z)$$

è conservativo. In caso affermativo, se ne calcoli un potenziale e lo si utilizzi per calcolare l'integrale di F sulla curva di parametrizzazione $r(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Sia T l'insieme, contenuto nel semispazio $z \geq 0$, racchiuso tra la superficie sferica di centro l'origine e raggio 3 e il cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Si calcoli l'integrale in T della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

(b) Si parametrizzi la frontiera di T in modo da orientarla positivamente.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 22 gennaio 2026

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 4y = \sin(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = e^{y^2 \ln|x|}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si stabilisca inoltre se f ammette limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

3. Si determini l'integrale del campo vettoriale $F(x, y) = (e^x, \sin(y))$ sulla poligonale di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$.

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = ((y + z)z, x^3 + z, x^2 z^2)$$

uscente attraverso la frontiera del sottoinsieme T di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal piano di equazione $z = 3$ e il cono di equazione $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$.

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y' = (t^2 - 1)e^t.$$

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = e^{-x}(2y - x^2 - y^2)$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Si consideri la curva di parametrizzazione $r(t) = (t - t^2, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$.

- (a) Si stabilisca se la curva è semplice, chiusa, regolare, e se ne disegni approssimativamente il sostegno.
- (b) Si calcoli l'area dell'insieme D , contenuto nel primo quadrante, delimitato dal sostegno della curva e dalla retta di equazione $x = 0$.

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

uscente attraverso la frontiera del cubo $T = [0, 2]^3$.