Bozza di svolgimento della prova scritta di Analisi Matematica II – 9 gennaio 2025

Quesito 1

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 10\,\cos(t) + e^t\,, \qquad y(0) = 3\,,\;\; y'(0) = -1$$

Svolgimento

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogena associata è $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2$, che ha radici $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Un sistema fondamentale di soluzioni è quindi formato dalle funzioni

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda}\,, \qquad t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2\,t}\,.$$

Per il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea assegnata si ottiene come somma di una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $10\,\cos(t)$ e una soluzione particolare dell'equazione con termine noto e^t. Per entrambe le equazioni si può utilizzare il principio di somiglianza.

Determino una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $10\,\cos(t)$ della forma $\varphi(t) = a\,\cos(t) + b\,\sin(t)$. Derivando ottengo

$$\varphi'(t) = -a\,\sin(t) + b\,\cos(t)\,, \quad \varphi''(t) = -a\,\cos(t) - b\,\sin(t)\,;$$

sostituendo nell'equazione:

$$-a\,\cos(t) - b\,\sin(t) - 3\,(-a\,\sin(t) + b\,\cos(t)) + 2\,(a\,\cos(t) + b\,\sin(t)) = 10\,\cos(t)\,.$$

Questa uguaglianza è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$-a - 3\,b + 2\,a = 10\,, \quad -b + 3\,a + 2\,b = 0$$

da cui ricavo $a = 1$ e $b = -3$. Dunque: $\varphi(t) = \cos(t) - 3\,\sin(t)$.

Determino una soluzione particolare dell'equazione con termine noto e^t della forma $\psi(t) = a\,e^t\,t$; la presenza del fattore t è dovuta al fatto che $\lambda = 1$ è radice del polinomio caratteristico, dunque e^t è soluzione dell'equazione omogenea. Derivando ottengo

$$\psi'(t) = a\,e^t\,t + a\,e^t\,, \quad \psi''(t) = a\,e^t\,t + a\,e^t + a\,e^t\,;$$

sostituendo nell'equazione:

$$a\,e^t\,t + 2\,a\,e^t - 3\,(a\,e^t\,t + a\,e^t) + 2\,(a\,e^t\,t) = e^t\,.$$

Questa uguaglianza è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $a = -1$, dunque: $\psi(t) = -t\,e^t$.

La generica soluzione dell'equazione assegnata è

$$y(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{2\,t} + \cos(t) - 3\,\sin(t) - t\,e^t \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy assegnato calcolo

$$y'(t) = c_1\,e^t + 2\,c_2\,e^{2\,t} - \sin(t) - 3\,\cos(t) - e^t - t\,e^t$$

e impongo le condizioni iniziali:

$$3 = y(0) = c_1 + c_2 + 1 - 0 - 0\,, \qquad -1 = y'(0) = c_1 + 2\,c_2 - 0 - 3 - 1 - 0\,.$$

Riscrivendo ottengo $c_1 + c_2 = 2$, $c_1 + 2\,c_2 = 3$ da cui ricavo $c_1 = c_2 = 1$.

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(t) = e^t + e^{2\,t} + \cos(t) - 3\,\sin(t) - t\,e^t \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Quesito 2

Si determinino e classifichino i punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ponendo

$$f(x,y) = (x - 2\,y)\,\ln(x^2 + y^2)\,.$$

Svolgimento

Osservo che la funzione assegnata è di classe C^∞ nell'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che è aperto.

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f_x(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + (x - 2\,y)\,\frac{2\,x}{x^2 + y^2} \qquad\qquad f_y(x,y) = -2\,\ln(x^2 + y^2) + (x - 2\,y)\,\frac{2\,y}{x^2 + y^2}$$

Imponendo che le derivate si annullino ottengo il sistema

$$\ln(x^2 + y^2) + (x - 2\,y)\,\frac{2\,x}{x^2 + y^2} = 0 \qquad\qquad -\ln(x^2 + y^2) + (x - 2\,y)\,\frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

equivalente a

$$\ln(x^2 + y^2) + (x - 2\,y)\,\frac{2\,x}{x^2 + y^2} = 0 \qquad\qquad (x - 2\,y)\,(2\,x + y) = 0\,.$$

La seconda equazione equivale a $x - 2y = 0$ oppure $2x + y = 0$.

Se $x - 2y = 0$ la prima equazione diventa $\ln(5y^2) = 0$, che equivale a $5y^2 = 1$; ottengo i due punti stazionari

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \qquad B\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Se $2x + y = 0$ la prima equazione diventa $\ln(5x^2) + (5x)\dfrac{2x}{5x^2} = 0$, cioè $\ln(5x^2) + 2 = 0$, che equivale a $5x^2 = e^{-2}$; ottengo i due punti stazionari

$$C\left(\frac{1}{\sqrt{5}\,e}, -\frac{2}{\sqrt{5}\,e}\right) \qquad D\left(-\frac{1}{\sqrt{5}\,e}, \frac{2}{\sqrt{5}\,e}\right).$$

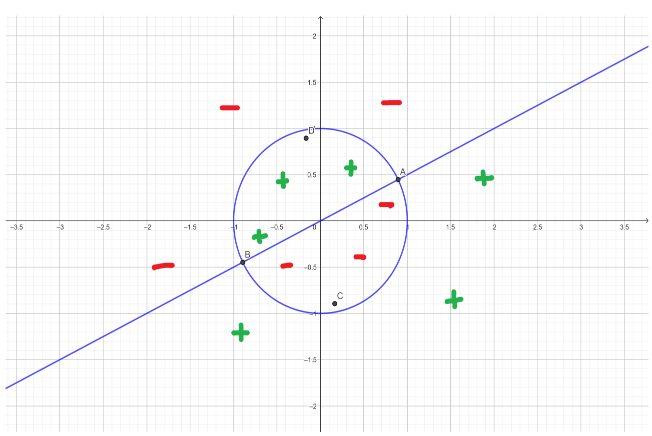
La natura dei punti stazionari ottenuti può essere stabilita determinando il segno degli autovalori della matrice hessiana di f calcolata in ciascuno di essi; seguo un provedimento alternativo, basato su considerazioni relative al segno e agli zeri di f.

Preliminarmente, osservo che f può essere prolungata con continuità ponendola uguale a 0 in $(0,0)$; ciò deriva dal fatto che $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, come si riconosce per esempio osservando che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ si ha

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x| + 2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, \ln(x^2+y^2) \leq 3\sqrt{x^2+y^2}\, \ln(x^2+y^2)$$

e ricordando che $t^\alpha \ln(t) \to 0$ per $t \to 0^+$, per ogni $\alpha > 0$.

Chiamando ancora f il prolungamento continuo a $\mathbb{R}^2$ della funzione assegnata, osservo che f assume valore 0 nei punti della circonferenza di equazioni $x^2+y^2 = 1$ e della retta di equazione $x - 2y$, disegnate in blu nella figura qui sotto; nella stessa figura è anche indicato il segno di f.



Le coordinate dei punti A e B soddisfano entrambe le equazioni $x-2y=0$ e $x^2+y^2=1$, dunque A e B si trovano sulla intersezione tra la retta e la circonferenza; è immediato riconoscere che sono punti di sella.

Il punto C si trova nel quarto quadrante (ha ascissa positiva e ordinata negativa); inoltre

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}\,e}\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{5}\,e}\right)^2=\frac{1}{5\,e^2}+\frac{4}{5\,e^2}=\frac{1}{e^2}<1,$$

quindi C si trova all'interno del cerchio di centro l'origine e raggio 1.

Dunque, C è interno alla regione di piano Ω costituita dalla metà del cerchio di centro l'origine e raggio 1 posta al di sotto della retta di equazione $x-2y=0$. Per il teorema di Weierstrass, f ha massimo e minimo globale in Ω; siccome f è identicamente nulla sulla frontiera di Ω e strettamente negativa all'interno, deduco che il massimo è assunto in tutti i punti della frontiera, mentre il minimo è assunto all'interno. Per il teorema di Fermat, il punto di minimo deve essere un punto stazionario, quindi deve necessariamente coincidere con C. In conclusione, C è punto di minimo globale per la restrizione di f a Ω e perciò è punto di minimo locale per f.

In maniera analoga, riconosco che D è interno alla regione di piano costituita dalla metà del cerchio di centro l'origine e raggio 1 posta al di sopra della retta di equazione $x-2y=0$; osservando che f è positiva all'interno di tale regione e si annulla sulla frontiera, deduco che D è punto di massimo locale per f.

Quesito 3

Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y)=\frac{y}{(x+y+1)^2}\,dx-\frac{x+1}{(x+y+1)^2}\,dy.$$

(a) Si stabilisca se ω è chiusa e se è esatta nel proprio dominio.

(b) Si calcoli l'integrale di ω sulla curva di parametrizzazione $\boldsymbol{r}(t)=\left(t^2,\ \frac{1}{t^2+1}\right),\quad t\in[0,2].$

Svolgimento

(a) La forma differenziale ω è definita in $A:=A_+\cup A_-$, con

$$A_+:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y+1>0\}\quad \text{e}\quad A_-:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y+1<0\}.$$

Tali insiemi sono disgiunti; ciascuno di essi è un semipiano aperto, dunque un insieme aperto e stellato.

In A la forma differenziale ω è di classe C^∞. Per ogni $(x,y)\in A$ risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x+y+1)^2}=\frac{(x+y+1)^2-y\,2(x+y+1)}{(x+y+1)^4}=\frac{x+y+1-2y}{(x+y+1)^3}=\frac{x-y+1}{(x+y+1)^3}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x+1}{(x+y+1)^2}\right)=-\frac{(x+y+1)^2-(x+1)\,2(x+y+1)}{(x+y+1)^4}=-\frac{x+y+1-2x-2}{(x+y+1)^3}=\frac{x-y+1}{(x+y+1)^3}$$

quindi ω è chiusa in A.

Siccome ciascuno degli insiemi A_+ e A_- è stellato, per il teorema di Poincaré la restrizione di ω a ciascuno di essi è esatta, dunque ω è esatta in A.

(b) Le componenti di $\boldsymbol{r}$ sono entrambe di classe C^1; risulta $\boldsymbol{r}(0)=(0,1)$ e $\boldsymbol{r}(2)=(4,\frac{1}{5})$, quindi la curva non è chiusa; inoltre:

$$\boldsymbol{r}'(t)=\left(2\,t,\ -\frac{2\,t}{(t^2+1)^2}\right),$$

dunque $\boldsymbol{r}'(t)=(0,0)$ se e solo se $t=0$. In conclusione, la curva assegnata è quasi regolare.

Dato che per ogni $t\in[0,2]$ si ha $t^2+\dfrac{1}{t^2+1}>0$, il sostegno $\boldsymbol{\gamma}$ della curva è contenuto in A_+ e ha dunque senso calcolare l'integrale di ω su $\boldsymbol{\gamma}$.

Siccome ω è esatta in A_+, posso calcolare l'integrale utilizzando la formula fondamentale del calcolo. Determino preliminarmente una primitiva di ω in A_+, cioè una funzione f definita in A_+ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{(x+y+1)^2}\qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{x+1}{(x+y+1)^2}.$$

Dalla prima uguaglianza deduco

$$f(x,y)=-\frac{y}{x+y+1}+g(y);$$

imponendo che valga la seconda uguaglianza ottengo

$$-\frac{x+y+1-y}{(x+y+1)^2}+g'(y)=-\frac{x+1}{(x+y+1)^2},$$

cioè $g'(y)=0$. Deduco che in A_+ la funzione g è costante; posso sceglierla costante di valore 0, ottenendo come primitiva di ω in A_+ la funzione $f(x,y)=-\dfrac{y}{x+y+1}$.

(Noto che la medesima funzione è primitiva di ω anche in A_-.)

Quindi:

$$\int_\gamma \omega = f(\boldsymbol{r}(2)) - f(\boldsymbol{r}(0)) = f\left(4, \frac{1}{5}\right) - f(0,1) = -\frac{1/5}{4+1/5+1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{26} + \frac{1}{2} = \frac{6}{13}.$$

Quesito 4

Sia T il tronco di cono avente come basi i cerchi

$$\left\{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 4,\ z=0\right\}, \qquad \left\{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1,\ z=1\right\}.$$

Si calcoli

$$\iiint_T e^z \, dx\, dy\, dz\,.$$

Svolgimento

Per il calcolo dell'integrale utilizzo la formula di integrazione per strati.

Fissato $z \in [0,1]$, osservo che la sezione di T di piede z, definita ponendo

$$T_z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in T\},$$

è un disco di centro $(0,0)$. Per determinarne il raggio, noto che la superficie laterale del tronco di cono è parte della superficie conica di equazione $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$; pertanto, T_z è il disco di centro $(0,0)$ e raggio $2-z$.

Dunque:

$$\iiint_T e^z \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\iint_{T_z} e^z \, dx\, dy\right) dz = \int_0^1 e^z \left(\iint_{T_z} dx\, dy\right) dz.$$

L'integrale doppio coincide con la misura di T_z, cioè l'area del disco, dunque:

$$\begin{aligned}
\iiint_T e^z \, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 e^z\, \pi\, (2-z)^2 \, dz = \pi \left(\Big[e^z\,(2-z)^2\Big]_0^1 + \int_0^1 e^z\, 2\,(2-z)\, dz\right) \\
&= \pi \left(\Big[e^z\,(2-z)^2\Big]_0^1 + \Big[e^z\, 2\,(2-z)\Big]_0^1 + \int_0^1 e^z\, 2 \ dz\right) \\
&= \pi \left(\Big[e^z\,(2-z)^2\Big]_0^1 + \Big[e^z\, 2\,(2-z)\Big]_0^1 + \Big[e^z\, 2\Big]_0^1\right) \\
&= \pi \left(\Big[e^z\,\left((2-z)^2 + 2\,(2-z) + 2\right)\Big]_0^1\right) = 5\,\pi\,(e-2)\,.
\end{aligned}$$