Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica II**

23 aprile 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare
$$y''' - y'' = t^2 + 1 + 3\,t\,e^t\,.$$

2. Si consideri la funzione definita ponendo $f(x,y) = \dfrac{\arcsin(x^2 y)}{x^2 - y^2}$.
   (a) Si determini il dominio di f specificando se è un insieme aperto oppure chiuso.
   (b) Si studino i limiti significativi di f. (*Suggerimento: si studi la restrizione di f a un singolo quadrante e si deducano i risultati generali con considerazioni di simmetria.*)

3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo
$$f(x,y) = \frac{|x|(x^2 + y - 1)}{x^2 + y^2 + 1}\,.$$
   (a) Si stabilisca se f è derivabile parzialmente e, in caso affermativo, se ne calcoli il gradiente.
   (b) Si studi la differenziabilità di f.
   (c) Utilizzando la definizione, si calcoli la derivata di f in $(0,1)$ nella direzione della bisettrice di primo e terzo quadrante.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 23 aprile 2024

Programma a.a. 2021/2022: quesiti 1, 2a, 3, 4
Programma a.a. 2022/2023: quesiti 1, 2b, 3, 4

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare
$$y''' - y'' = t^2 + 1 + 3\,t\,e^t\,.$$

2a. Si stabilisca se la funzione definita ponendo
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^3 - y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
è differenziabile in $(0,0)$.

2b. Si determinino e classifichino i punti di estremo locale della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo
$$f(x,y) = e^{2\,x+y}(x^2 - y)\,.$$

3. Sia D il dominio piano, contenuto nel primo e quarto quadrante, delimitato dalle curve di equazione $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$. Si calcoli l'integrale
$$\iint_D \frac{|y| + 1}{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,.$$

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale definito ponendo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,\ y - x,\ x + y + z)$ uscente attraverso la superficie del tetraedro di vertici l'origine e i punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.
Si utilizzi il teorema della divergenza per verificare il risultato ottenuto.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica II**

10 giugno 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Data la funzione definita ponendo $f(x, y) = x^2 (x + y - y^2)$,
   (a) si classifichino i punti stazionari di f;
   (b) si determinino gli estremi globali di f nel triangolo di vertici $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, -1)$.

2. Sia $\boldsymbol{\gamma}$ l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ congiungente i punti $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
   (a) Si calcoli l'integrale su $\boldsymbol{\gamma}$ della funzione definita ponendo $f(x, y) = x(1 + 4y)$.
   (b) Si calcoli l'integrale su $\boldsymbol{\gamma}$ della forma differenziale
$$\omega(x, y) = \frac{2x}{1 + (x^2 + 3y)^2}\, dx + \frac{3}{1 + (x^2 + 3y)^2}\, dy\,.$$

3. Sia $T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le x\,,\ z \ge 0\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 9\Big\}$.
   (a) Si parametrizzi la frontiera di T, precisando se la parametrizzazione scelta la orienta positivamente.
   (b) Si utilizzi la parametrizzazione del punto precedente per calcolare il flusso uscente attraverso la frontiera di T del campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (2x,\ 0,\ z^2)$.
   (c) (facoltativo) Applicando il teorema della divergenza si verifichi il risultato ottenuto nel punto precedente.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 10 giugno 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022 e successivi**

   Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin(t)} \qquad\qquad t \in (0, \pi)\,.$$

2a. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022**

   Si studi la differenziabilità della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x, y) = |y|(x^2 + y^2 - 4)\,.$$

2b. **Solo per chi fa riferimento al programma di anni accademici diversi dall'a.a. 2021/2022**

   Si determinino gli estremi globali della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x, y) = x^2\,(x + y - y^2)$ nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.

3. Sia γ l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ congiungente i punti $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

   (a) Si calcoli l'integrale su γ della funzione definita ponendo $f(x, y) = x\,(1 + 4\,y)$.

   (b) Si calcoli l'integrale su γ della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2\,x}{1 + (x^2 + 3\,y)^2}\,dx + \frac{3}{1 + (x^2 + 3\,y)^2}\,dy\,.$$

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (2\,x,\ 0,\ z^2)$ uscente attraverso la frontiera dell'insieme

$$T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le x\,,\ z \ge 0\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 9\Big\}.$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Recupero seconda prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica II**

24 giugno 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Data la funzione definita ponendo $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$,
   (a) si classifichino i punti stazionari di f;
   (b) si determinino gli estremi globali di f nell'insieme racchiuso dall'ellisse di equazione $2x^2+y^2 = 6$.
   Suggerimento: per lo studio sulla frontiera si utilizzi il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

2. Sia T il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando intorno all'asse z il trapezio di vertici $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 3)$, $(0, 3, 3)$, $(0, 5, 1)$. Si calcoli

$$\iiint_T x^2 z \, dx \, dy \, dz .$$

3. Sia $\boldsymbol{\Sigma}$ la porzione del paraboloide di equazione $z = 9 - x^2 - y^2$ posta al di sopra del piano di equazione $x + y + z = 5$.
   (a) Si scriva una parametrizzazione di $\boldsymbol{\Sigma}$, precisando la direzione del campo vettoriale normale.
   (b) Si utilizzi la parametrizzazione del punto precedente per calcolare il flusso che attraversa $\boldsymbol{\Sigma}$ dall'alto verso il basso del rotore del campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y,\ z,\ x)$.
   (c) (facoltativo) Applicando il teorema di Stokes si verifichi il risultato ottenuto nel punto precedente.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 24 giugno 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. **Per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022 e successivi**

   Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = (t^2 + t)\,e^{-t}\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -1\,.$$

2a. **Per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022**

Si studino i limiti significativi della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,\sin(x\,y)}{x^4 + y^4} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2b. **Per chi fa riferimento al programma di anni accademici diversi dall'a.a. 2021/2022**

Si determinino gli estremi globali della funzione definita ponendo $f(x,y) = 3\,x^2 + 2\,x\,y + y^2$ nell'insieme racchiuso dall'ellisse di equazione $2\,x^2 + y^2 = 6$.

Suggerimento: per lo studio sulla frontiera si utilizzi il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

3. Sia T il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando intorno all'asse z il trapezio di vertici $(0,1,1)$, $(0,1,3)$, $(0,3,3)$, $(0,5,1)$. Si calcoli

$$\iiint_T x^2 z \; dx\,dy\,dz\,.$$

4. Sia $\boldsymbol{\Sigma}$ la porzione del paraboloide di equazione $z = 9 - x^2 - y^2$ posta al di sopra del piano di equazione $x + y + z = 5$. Si calcoli il flusso che attraversa $\boldsymbol{\Sigma}$ dall'alto verso il basso del rotore del campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y,\ z,\ x)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 8 luglio 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare
$$y''' - 2\,y'' + y = t\,e^t\,.$$

2. Si determinino e classifichino i punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo
$$f(x,y) = (x\,y - 1)(x^2 + y^2 - 4)\,.$$

3. Sia D il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalle rette di equazione $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Si calcoli
$$\iint_D (x + y)\;dx\,dy\,.$$

4. Sia $\boldsymbol{\Sigma}$ la porzione del paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ posta al di sopra del piano di equazione $z = 0$. Si calcoli il flusso che attraversa $\boldsymbol{\Sigma}$ dall'alto verso il basso del rotore del campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-y,\; y + z,\; x\,z)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 9 settembre 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$2\,y'' - 3\,y' + y = 3\,e^{t} + t\,e^{2\,t}\,.$$

2. Si determinino gli estremi globali della funzione definita ponendo

$$f(x,y) = x^2(x-y^2) - x$$

nel quadrato di vertice nei punti $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$.

3. Si consideri la curva ottenuta concatenando il segmento di estremi $(0,0)$ e $(\pi,0)$ e il grafico della funzione $f(x) = \sin(x)$, $x \in [\pi, 2\pi]$.
Si calcoli l'integrale sulla curva assegnata della forma differenziale

$$\omega(x,y) = |1 - x^2 + y^2|\,dx + 2\,x\,y\,dy\,.$$

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y,\,x,\,z^2)$ uscente attraverso la frontiera dell'insieme limitato racchiuso tra il cono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 9$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 5 novembre 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare
$$y'' - 4\,y' + 5\,y = e^{2\,t}\big(1 + \cos(t)\big)\,.$$

2. Si determinino e classifichino i punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + 4\,x\,y\,.$$

3. Sia D il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalla retta di equazione $x + y - 1 = 0$ e dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Si calcoli
$$\iint_D \frac{x + 3\,y}{(x^2 + y^2)^2}\;dx\,dy\,.$$

4. Si calcoli il flusso del rotore del campo vettoriale
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (0,\,2\,x,\,x\,y\,z)$$
che attraversa dall'alto verso il basso la porzione del paraboloide ellittico di equazione $z = 1 - x^2 - 4\,y^2$ posta nel semipiano $z \geq 0$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 9 gennaio 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 10\,\cos(t) + e^t\,, \qquad y(0) = 3\,,\quad y'(0) = -1$$

2. Si determinino e classifichino i punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ponendo

$$f(x,y) = (x - 2\,y)\,\ln(x^2 + y^2)\,.$$

3. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{y}{(x+y+1)^2}\,dx - \frac{x+1}{(x+y+1)^2}\,dy\,.$$

   (a) Si stabilisca se ω è chiusa e se è esatta nel proprio dominio.

   (b) Si calcoli l'integrale di ω sulla curva di parametrizzazione $\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2,\ \dfrac{1}{t^2+1}\right)$, $\quad t \in [0,2]$.

4. Sia T il tronco di cono avente come basi i cerchi

$$\big\{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 4,\ z = 0\big\}, \qquad \big\{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\big\}.$$

   Si calcoli

$$\iiint_T e^z\,dx\,dy\,dz\,.$$