Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica II

27 aprile 2023

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y'' - y' = t\, e^{2t} + \frac{1}{1+e^t}\,.$$

2. Sia data la funzione definita ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2\, y)}{x^2 + y^4} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Si individuino i limiti significativi e, se esistono, li si calcolino.

   (b) Si stabilisca se f è derivabile parzialmente.

   (c) Si stabilisca se f è differenziabile.

   (d) Si stabilisca se f è derivabile in $(0,0)$ in una generica direzione.

3. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $\nabla g(1,1,2) = (3,-1,1)$ e sia $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2\, y^3,\ x^3\, y^2,\ x + y^4)\,.$$

   Posto $h := g \circ \boldsymbol{f}$, si calcoli $\dfrac{\partial h}{\partial x}(1,1)$.

4. Si consideri la curva di parametrizzazione

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(\sin(t),\ t(t-2\pi)\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

   (a) Si stabilisca se la curva è semplice, chiusa, regolare.

   (b) Si determinino il versore tangente e il versore normale ovunque siano definiti.

   (c) Si disegni approssimativamente il sostegno della curva.

   (d) Si stabilisca se la parametrizzazione assegnata orienta positivamente la frontiera del dominio limitato racchiuso dal sostegno della curva.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

27 aprile 2023

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare
$$y'' - 3\,y' = t\,e^t\,.$$

2. Sia data la funzione definita ponendo
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2\,y)}{x^2+y^4} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   (a) Si individuino i limiti significativi e, se esistono, li si calcolino.
   (b) Si stabilisca se f è derivabile in $(0,0)$ in una generica direzione.
   (c) Si stabilisca se f è differenziabile in $(0,0)$.

3. Si consideri la curva di parametrizzazione
$$\boldsymbol{r}(t) = \big(\sin(t),\ t(t-2\pi)\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$
   (a) Si stabilisca se la curva è semplice, chiusa, regolare.
   (b) Si disegni approssimativamente il sostegno della curva.
   (c) Si calcoli l'integrale sulla curva assegnata della forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\,dx + \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,dy\,.$$

4. Sia $f(x,y) = x\,(y+2)$ e sia D il dominio piano, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle curve di equazione $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=25$, $y=0$ e $y=3$.
   Si calcoli il volume del cilindroide relativo alla funzione f di base D.

Nota: tutti gli studenti presenti alla prova scritta hanno optato per il programma dell'anno accademico 2021/2022.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica II

14 giugno 2023

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si classifichino i punti stazionari della funzione definita ponendo $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$.
   Si determinino gli estremi globali di f nell'insieme delimitato dalla ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$ e dalla circonferenza di equazione $9x^2 + 9y^2 = 1$.

2. Si consideri la curva ottenuta concatenando il grafico della funzione $f(x) = x^2(1 - x^2)$, $x \in [-1, 1]$ e il segmento di estremi $(1, 0)$ e $(3, 0)$.
   Si calcoli l'integrale sulla curva assegnata della forma differenziale
   $$\omega(x, y) = |x^2 + y^2 - 4|\, dx - 2\, x\, y\, dy\,.$$

3. Sia T il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal cono di equazione $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$ e il piano di equazione $z = 3$.
   (a) Si calcoli l'integrale su T della funzione $f(x, y, z) = x^2 z$.
   (b) (Facoltativo) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y, z) = ((y + z)z,\ x^3 + z,\ x^2 z^2)$ uscente attraverso la frontiera di T.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II**

14 giugno 2023

programma a.a. 2020/2021 o precedenti: quesiti 2, 3, 4
programma a.a. 2021/2022: quesiti 1, 2a, 3, 4
programma a.a. 2022/2023: quesiti 1, 2, 3, 4a; facoltativo 4b

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 2\,y' + 2\,y = (t^2 + 2)\,e^t\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

2. Sia data la funzione definita ponendo $f(x, y) = x\,\ln(x^2 + y^2)$.
   (a) Si individuino i limiti significativi e, se esistono, li si calcolino.
   Si calcoli la derivata di f nel punto $(2, 3)$ nella direzione della bisettrice di primo e terzo quadrante.
   (b) Si classifichino i punti stazionari di f.
   Si determinino gli estremi globali di f nell'insieme delimitato dalla circonferenza di equazione $9\,x^2 + 9\,y^2 = 1$ e dalla ellisse di equazione $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$.

3. Si consideri la curva ottenuta concatenando il grafico della funzione $f(x) = x^2(1 - x^2)$, $x \in [-1, 1]$ e il segmento di estremi $(1, 0)$ e $(3, 0)$.
   Si calcoli l'integrale sulla curva assegnata della forma differenziale

$$\omega(x, y) = |x^2 + y^2 - 4|\,dx - 2\,x\,y\,dy\,.$$

4. Sia T il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal cono di equazione $z = \sqrt{4\,x^2 + y^2}$ e il piano di equazione $z = 3$.
   (a) Si calcoli l'integrale su T della funzione $f(x, y, z) = x^2\,z$.
   (b) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y, z) = ((y + z)z,\ x^3 + z,\ x^2\,z^2)$ uscente attraverso la frontiera di T.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II**

28 giugno 2023

programma a.a. 2021/2022: quesiti 1, 2a, 3, 4
programma a.a. 2022/2023: quesiti 1, 2b, 3, 4; facoltativo 2a
seconda prova di esonero: quesiti 2b, 3, 4

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y'' - y' - 6\,y = 2\,e^{3\,t} + 1.$$

2a. Si stabilisca se la funzione definita ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^3 - x^3 - y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$.

2b. Si determinino gli estremi globali della funzione definita ponendo $f(x,y) = 4\,y^4 - 16\,x^2 y + x$ nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

3. Sia D il dominio piano, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle curve di equazione $2x - y = 0$, $x - 2y = 0$, $xy = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$. Si calcoli l'integrale

$$\iint_D \frac{1}{x^3\,y}\;dx\,dy\,.$$

4. Si consideri il campo vettoriale definito ponendo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y^2\cos(x\,z),\ x^3 e^{y\,z},\ -e^{x\,y\,z})$.
Si calcoli il flusso del rotore di $\boldsymbol{F}$ uscente attraverso la parte della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ situata al di sopra del piano di equazione $z = 0$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II**

12 luglio 2023

programma a.a. 2021/2022: quesiti 1, 2a, 3, 4
programma a.a. 2022/2023: quesiti 1, 2b, 3, 4; facoltativo 2a

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare
$$2\,y'' - 3\,y' + y = 3\,e^{t} + t\,e^{2\,t}\,.$$

2. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x,y) = (3\,x^2 - y^2)\,e^{x+y}$.
   (a) Si calcoli la derivata di f nel punto $(2,1)$ nella direzione della bisettrice di secondo e quarto quadrante. Si determini inoltre l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1)$.
   (b) Si determinino gli estremi locali e globali di f.

3. Si consideri la curva di parametrizzazione $\boldsymbol{r}(t) = \big(1-t,\ t-t^2\big)\,, \quad t \in [0,1]\,.$
   (a) Si stabilisca se la curva è semplice, chiusa, regolare, e se ne disegni approssimativamente il sostegno.
   (b) Si utilizzi il teorema di Gauss-Green per calcolare l'area dell'insieme D, contenuto nel primo quadrante, delimitato dal sostegno della curva e dalla retta di equazione $y = 0$.
   (c) Si calcoli l'integrale sulla curva assegnata della forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{y}{(x+y+1)^2}\,dx - \frac{x+1}{(x+y+1)^2}\,dy\,.$$

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x\,z,\ y\,z,\ x\,y\,z)$$
uscente attraverso la frontiera dell'insieme
$$A = \big\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \le 4\,,\ 0 \le z \le 3\big\}\,.$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II**

7 settembre 2023

programma a.a. 2020/2021 e precedenti: quesiti 2, 3, 4
programma a.a. 2021/2022: quesiti 1, 2a, 3, 4
programma a.a. 2022/2023: quesiti 1, 2b, 3, 4; facoltativo 2a
seconda prova di esonero: quesiti 2b, 3, 4

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y''' - 5\,y'' + 9\,y' - 5\,y = \cos(t)\,, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0\,.$$

2. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x,y) = \ln\big(3 + (x+y)^2\big)$.
   (a) Si calcoli la derivata di f nel punto $(2,1)$ nella direzione della bisettrice di secondo e quarto quadrante. Si determini inoltre l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1)$.
   (b) Si determinino gli estremi globali di f nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 10\,x + y^2 \leq 0\}$.

3. Sia D il dominio piano, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle curve di equazione $x - 2\,y = 0$, $y = 0$ e $x^2 + 4\,y^2 - 4 = 0$. Si calcoli l'integrale

$$\iint_D \frac{x\,y}{(x^2 + 4\,y^2 + 1)^2}\,dx\,dy\,.$$

4. Si verifichi la validità del teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2\,x\,z,\ -y,\ z)$$

e la superficie avente sostegno

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + 2\,z = 2\,, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\big\}\,.$$