Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica II

Anno accademico 2021/2022

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y''' + 6\,y'' + 16\,y' + 16\,y = (4\,t + 1)\,e^{-2\,t}\,.$$

2. Dato l'insieme $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\,, \quad y \neq 0\right\}$,
   (a) si determinino l'interiore, la frontiera, la chiusura e il derivato di A;
   (b) si stabilisca se A è un insieme aperto, chiuso, connesso, compatto.

3. Data la funzione definita ponendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x\,y)}{x^2 + y^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

   (a) se ne individuino i limiti significativi e, se esistono, li si calcolino;
   (b) si stabilisca se f è derivabile parzialmente.

4. Data la funzione definita ponendo

$$f(x, y, z) = 3\,x^2\,y + y^2\,z,$$

   (a) si determini il gradiente di f;
   (b) si determini la derivata direzionale di f in $(1, -1, 2)$ nella direzione del gradiente;
   (c) (facoltativo) si verifichi quanto trovato al punto (b) applicando la regola del gradiente, giustificandone la applicabilità.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica II

Anno accademico 2021/2022

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si consideri la curva di parametrizzazione

$$\boldsymbol{r}(t) = \big((t+1)^2,\ t^2(t+2)\big), \quad t \in [-2, 2].$$

   (a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa.

   (b) Si determini il versore tangente al sostegno della curva nel punto $(0,\ 1)$.

   (c) Si disegni approssimativamente il sostegno della curva.

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}\, dx + \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2}\, dy\,.$$

   (a) Si stabilisca se ω è chiusa e se è esatta nel proprio insieme di definizione, o in qualche sottoinsieme del proprio insieme di definizione.

   (b) Si calcoli l'integrale di ω sulla curva di parametrizzazione in coordinate polari

$$\rho(\theta) = 1 - \cos(\theta), \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

3. Si utilizzi un opportuno cambiamento di variabili per determinare la misura del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle parabole di equazione $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 1 - x^2$, $y = 3 - x^2$.

4. Sia C il cilindro solido con direttrice la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 contenuta nel piano di equazione $z = 0$ e generatrici parallele all'asse z; sia T la porzione di C compresa tra i piani di equazione $z = 0$ e $x - y - 2z + 4 = 0$.

   (a) Si calcoli l'integrale in T della funzione definita ponendo $f(x, y, z) = x\,y\,z$.

   (b) Si stabilisca se T è un dominio regolare; in caso affermativo, si parametrizzi la frontiera di T e si verifichi se rispetto alla parametrizzazione scelta la frontiera di T è orientata positivamente.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

14 giugno 2022

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^3}$.

   (a) Si individuino i limiti significativi di f e, se esistono, li si calcolino.

   (b) Data la funzione $g(t) = (t^2,\ 2+t)$, si determini la matrice jacobiana della funzione composta $g \circ f$ nel punto $(1,2)$.

2. Sia $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

   (a) Si calcoli l'integrale in T della funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$.

   (b) Si parametrizzi la frontiera di T e si verifichi se rispetto alla parametrizzazione scelta la frontiera di T è orientata positivamente.

3. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x\,y,\ x^3,\ x\,y\,z)$, definito in $\mathbb{R}^3$.
   Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ che attraversa dall'alto verso il basso la porzione della superficie sferica di centro $(0,0,-1)$ e raggio $\sqrt{5}$ posta al di sotto del piano di equazione $z=0$.

4a. **Solo per gli studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022**
   Si risolva l'equazione differenziale $t^3\,y''' + 4\,t^2\,y'' = 3 + \sqrt{t}$, con $y = y(t)$.

4b. **Solo per gli studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2020/2021 o precedenti**
   Si determinino gli estremi locali e globali della funzione $f(x,y) = x\,y\,(x^2+y^2-4)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

29 giugno 2022

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si consideri la funzione $f(x, y) = x\, y\, (1 - |x|)$.

   (a) Si studi la continuità e la differenziabilità di f.

   (b) Si individuino i limiti significativi di f e, se esistono, li si calcolino.

   (c) Si stabilisca se f è limitata.

2. Si consideri la curva di parametrizzazione

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{1}{t^2 + 1},\ t^2 \right), \quad t \in [-1, 2].$$

   (a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa e se ne disegni approssimativamente il sostegno.

   (b) Si calcoli l'integrale sulla curva della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2\, x}{1 + x^2 + y}\, dx + \frac{1}{1 + x^2 + y}\, dy\,.$$

3. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x\, y^2,\ x^2\, z,\ x\, y\, z)$, definito in $\mathbb{R}^3$.
   Si calcoli il flusso di $\mathbf{F}$ uscente attraverso la frontiera del dominio T, contenuto nel semispazio di equazione $z \geq 0$, delimitato dalle superfici sferiche di centro l'origine e raggi 1 e 2, rispettivamente.

4. Si risolva il problema di Cauchy

$$y'' - 6\, y' + 13\, y = \cos(2\, t)\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = -1\,.$$

   Nota: tutti gli studenti che hanno sostenuto questa prova scritta hanno optato per il programma dell'anno accademico 2021/2022.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

14 luglio 2022

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Data la funzione definita ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^2+y^4} & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0 & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

   se ne studino la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità.

2. Si consideri la curva di parametrizzazione

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(2+4\,t-t^2,\ t(t-2)(4-t)\big)\,, \quad t\in[0,4].$$

   (a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa e se ne disegni approssimativamente il sostegno.

   (b) Si calcoli l'area del dominio regolare la cui frontiera coincide con il sostegno della curva.

3. Sia D il sottoinsieme del primo quadrante delimitato dalle circonferenze di equazione $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2-2\,y=0$ e sia $f:D\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x,y)=x$.

   (a) Si calcoli il volume del cilindroide sotteso al grafico di f.

   (b) Si calcoli l'area della superficie grafico associata a f.

   (c) Si calcoli il flusso diretto verso il basso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x\,y,\ x\,z,\ z^2)$ attraverso la superficie grafico associata a f.

4a. **Solo per gli studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022**

Si risolva l'equazione differenziale $t^2\,y'' - t\,y' + 5\,y = t^2\ln(t)$, con $y=y(t)$.

4b. **Solo per gli studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2020/2021 o precedenti**

Si determinino gli estremi globali nel triangolo di vertici i punti $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ della funzione $f(x,y)=x\,y\,(1-|x|)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

8 settembre 2022

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determinino, e se esistono si calcolino, i limiti significativi della funzione definita ponendo

$$f(x,y) = \frac{x^2 \ln(y)}{x^2 + (y-1)^2}\,.$$

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{(3\,x^2 - y^2)(x^2+y^2)}{x^2\,y}\,dx + \frac{(3\,y^2 - x^2)(x^2+y^2)}{x\,y^2}\,dy\,.$$

   (a) Si stabilisca se ω è chiusa e se è esatta nel proprio insieme di definizione, o in qualche sottoinsieme del proprio insieme di definizione.

   (b) Si calcoli l'integrale di ω sulla curva di parametrizzazione

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(t + \cos^2(t)\,,\ 1 + \sin^2(t)\big)\,, \quad t \in [0, \pi/2].$$

3. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (2\,x + y\,z,\ x\,z + y^2,\ x^2 + y\,z)$, definito in $\mathbb{R}^3$. Si calcoli il flusso di $\mathbf{F}$ che attraversa verso l'alto la porzione della superficie sferica di centro l'origine e raggio 2 contenuta nel semispazio di equazione $z \geq 0$.

4a. **Solo per gli studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022**

Si risolva l'equazione differenziale $y''' - y'' - 5\,y' - 3\,y = t^2\,e^{-t}$, con $y = y(t)$.

4b. **Solo per gli studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2020/2021 o precedenti**

Si determinino gli estremi globali della funzione $f(x,y) = x^2(x\,y - 1)$ nell'insieme delimitato dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla retta di equazione $y = 1$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

9 gennaio 2023

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si risolva il problema di Cauchy

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 3\,\sin(2\,t)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0\,,$$

   con $y = y(t)$.

2. Si studino la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x, y) = |x - y|\,(x^2 + y^2)\,.$$

3. Sia D il sottoinsieme del primo quadrante delimitato dalle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2\,x = 0$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$.

   Si calcoli il volume del cilindroide sotteso al grafico di f.

4. Si considerino il campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^3$ ponendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2,\ x\,z,\ y+z)$ e la superficie $\Sigma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z = 1\big\}$.

   Si calcoli il il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ che attraversa Σ dal basso verso l'alto e si verifichi mediante il teorema di Stokes la correttezza del risultato ottenuto.

Nota: alla prova scritta non sono presenti studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2020/2021 o precedenti.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

24 gennaio 2023

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si risolva l'equazione differenziale $y''' - 7\,y'' + 14\,y' - 8\,y = e^t + t + 1$, con $y = y(t)$.

2. Si individuino, e se esistono si calcolino, i limiti significativi della funzione definita ponendo
$$f(x, y) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}\,.$$

3. Sia D il sottoinsieme del primo quadrante delimitato dalle rette di equazione $x + y - 1 = 0$ e $x + y - 3 = 0$. Si calcoli
$$\iint_D (x + y)\,dx\,dy\,.$$

4. Si considerino il campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^3$ ponendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y,\ y + z,\ x\,z)$ e la superficie Σ grafico della funzione definita nell'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ponendo $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

   Si calcoli il il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ che attraversa Σ dal basso verso l'alto e si verifichi mediante il teorema di Stokes la correttezza del risultato ottenuto.

Nota: alla prova scritta non sono presenti studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2020/2021 o precedenti.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

7 febbraio 2023

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si risolva il problema di Cauchy

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(t)}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,,$$

con $y = y(t)$.

2. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x,y) = e^{-|x-y|\,y}$.

   (a) Si studi la differenziabilità di f.

   (b) Si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ in una generica direzione $\boldsymbol{v}$.

3. Sia D il sottoinsieme del primo quadrante delimitato dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e dalle rette di equazione $y = x$ e $x = 1$. Si calcoli

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy\,.$$

4. Si consideri la curva di parametrizzazione

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(t(2-t),\ t(t-1)(t-2)\big)\,, \quad t \in [0,2].$$

   (a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa e se ne disegni approssimativamente il sostegno.

   (b) Si calcoli l'area del dominio regolare delimitato dal sostegno della curva.

Nota: alla prova scritta non sono presenti studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2020/2021 o precedenti.