Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica II

Anno accademico 2020/2021

1. Si consideri la funzione definita ponendo $f(x,y) = \dfrac{x^3\,y+1}{x^6+y^2}$.

   (a) Si determini il dominio di f e si stabilisca dove f si annulla, dove è positiva e dove è negativa.

   (b) Si individuino e, se esistono, si calcolino i limiti significativi di f.

   (c) (Facoltativo) Si dimostri che f è limitata inferiormente.

2. Si consideri la funzione definita ponendo $f(x,y) = e^{-|x-y|\,x}$.

   (a) Si studi la differenziabilità di f.

   (b) Si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ in una generica direzione $\boldsymbol{v}$.

3. Si considerino le funzioni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite ponendo

$$f(x,y,z) = \big(3\,x^2\,y + z^2\ ,\ e^{-y}\cos(\pi z)\big), \qquad g(u,v) = u\,v^3 + v.$$

   (a) Si stabilisca se il teorema su differenziabilità e composizione funzionale può essere applicato alla funzione composta $h := g \circ f$.

   (b) In caso affermativo, lo si utilizzi per determinare la matrice jacobiana e il differenziale di h in $(1,0,1)$.

4. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

$$f(x,y) = (x-2\,y)(x^2+y^2-2\,x).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica II

Anno accademico 2020/2021

1. Assegnata la curva parametrica $\gamma(t) = (1 - \cos\, t,\; t - \sin\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

   (a) si stabilisca se è regolare, semplice, chiusa, e si determini il versore tangente al sostegno di γ nel punto $(2, \pi)$;

   (b) si calcoli la lunghezza di γ;

   (c) si calcoli l'area del dominio regolare contenuto nel primo quadrante, delimitato dal sostegno di γ e dalla retta di equazione $x = 0$.

2. Assegnata la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\cos(\pi x) - \frac{1}{2\sqrt{y - x}}\right) dx + \left(\frac{1}{2\sqrt{y - x}} - 1\right) dy\,,$$

   (a) si stabilisca se ω è chiusa e se è esatta nel proprio insieme di definizione;

   (b) se ω è esatta, se ne determini una primitiva;

   (c) si calcoli l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (1 - t, 2 - t^2)$, $t \in [0, 1]$.

3. Si calcoli l'integrale

$$\iiint_T (x^2 + y^2)\,|z|\,dx\,dy\,dz\,,$$

   dove T è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto intersecando la palla chiusa di centro l'origine e raggio 2 e il complementare del cilindro solido avente generatrici parallele all'asse z e direttrice la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel piano $z = 0$.

4. Si consideri la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z il sostegno della curva

$$\gamma(t) = (0,\; 1 + 2t,\; t)\,, \quad t \in [0, 2]\,.$$

   (a) Se ne calcoli l'area.

   (b) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (-z, 2y, xy)$ che attraversa la superficie dall'alto verso il basso.

   (c) (Facoltativo) Si utilizzi il teorema della divergenza per verificare il risultato ottenuto al punto precedente.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

10 giugno 2021

1. Si studino continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \frac{x\,|y^2-1|}{x^2+y^2+1}\,.$$

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = (x-y)^2 - \frac{1}{4}\,(x^4+y^4)$.
   (a) Si determinino i punti stazionari di f e li si classifichino.
   (b) Si calcoli il limite di f per $\|(x,y)\| \to +\infty$.
   (c) Si determinino gli estremi globali di f.

3. Si determini il più grande insieme aperto in cui la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{1}{|x|+y^2+1}\,dx + \frac{2\,y}{|x|+y^2+1}\,dy$$
è esatta.

4. Sia D il dominio piano, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle curve di equazione $x\,y = 1$, $x\,y = 2$, $y = 3\,x^2$, $x = 1$. Si calcoli
$$\iint_D \frac{y\,e^{x\,y}}{x^2}\,dx\,dy\,.$$

5. Si considerino la superficie parametrica $\sigma(u,v) = (u,\ u+v,\ u\,v)$, definita nella palla chiusa unitaria di $\mathbb{R}^2$ e il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x\,z,\ x\,y,\ y\,z)$, definito in $\mathbb{R}^3$.
Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso σ.
(Facoltativo) Si utilizzi il teorema di Stokes per verificare il risultato ottenuto.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

24 giugno 2021

1. Si stabilisca se la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
è continua in $(0,0)$; in caso affermativo, si verifichi se è anche differenziabile in $(0,0)$.

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = |x+y|\, e^{-(x^2+y^2)}$.
   (a) Si determinino gli estremi locali e globali di f.
   (b) (Facoltativo) Si determino gli estremi globali di f nel dominio, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle rette di equazione $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ e dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

3. Assegnata la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{1}{x-\sqrt{y}}\, dx + \frac{x - 2\sqrt{y}}{2\,y\,(x-\sqrt{y})}\, dy\,,$$
   (a) si stabilisca se ω è esatta nel proprio insieme di definizione; in caso affermativo, se ne determini una primitiva;
   (b) si calcoli l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (2+t, 1+3\,t)$, $t \in [0,1]$.

4. Si calcoli l'integrale
$$\iiint_T \ln(x^2+y^2+1)\, z\, dx\, dy\, dz\,,$$
dove T è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ e il piano di equazione $z = 4$.

5. Sia Σ la porzione della superficie sferica di centro l'origine e raggio 3 contenuta nel primo ottante. Si calcoli l'integrale su Σ della funzione $f(x,y,z) = x\,y\,z^2$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

8 luglio 2021

1. Si stabilisca se la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} (x-2y)\ln(x^2+y^2) & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
è continua in $(0,0)$; in caso affermativo, si verifichi se è anche differenziabile in $(0,0)$.
Si stabilisca inoltre se f ammette limite all'infinito e in caso affermativo lo si calcoli.

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita nel quesito 1.
(Suggerimento: se si tiene conto del segno e degi zeri di f, non è necessario studiarne la matrice hessiana per classificare i punti stazionari.)

3. Assegnata la curva parametrica $\gamma(t) = (e^t \sin t,\ e^t \cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$,
   (a) si calcoli la lunghezza di γ;
   (b) si calcoli l'integrale curvilineo su γ della forma differenziale
$$\omega(x,y) = \left(1 + \frac{4x}{2x^2+y^2}\right) dx + \frac{2y}{2x^2+y^2}\, dy\,.$$

4. Sia D il dominio, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle rette di equazione $x=0$, $x+y-3=0$, $y=2x$, $y=2x+2$. Si calcoli l'integrale
$$\iint_D e^{3x} \cos(y-2x)\, dx\, dy\,.$$

5. Sia T l'insieme limitato, contenuto nel semipiano $\{z \geq 0\}$, delimitato dalla superficie cilindrica di equazione $x^2+y^2=4$ e dal piano di equazione $x-y-3z+6=0$.
Si calcoli il flusso uscente attraverso la frontiera di T del campo vettoriale
$$F(x,y,z) = (x^3, y^3, x+2y).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

7 settembre 2021

1. Si stabilisca se in $(0,0)$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x\,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua, derivabile direzionalmente, differenziabile.
Si stabilisca inoltre se f ammette limite all'infinito e in caso affermativo lo si calcoli.

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione $f(x,y) = e^{-x}(y^2 - (x^2-1)^2)$.

3. Assegnata la forma differenziale

$$\omega(x,y) = |1 - x^2 - y^2|\,dx + 2\,x\,y\,dy\,,$$

(a) si stabilisca se ω è esatta nel proprio insieme di definizione o in un suo sottoinsieme;
(b) si calcoli l'integrale di ω sul segmento congiungente i punti $(3,0)$ e $(0,3)$.

4. Sia $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x+y \leq 4\big\}$. Si calcoli l'integrale

$$\iint_D (x-y+2)\,\ln\!\big(1+(x+y)^2\big)\,dx\,dy\,.$$

5. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ uscente attraverso la frontiera del cubo $T = [0,1]^3$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

9 novembre 2021

1. Assegnata la funzione definita ponendo $f(x,y) = x\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

   (a) si stabilisca se f è differenziabile in $(0,0)$;

   (b) si calcoli la derivata di f nella direzione $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nel punto $(2,0)$.

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

   $$f(x,y) = y\,(x^2 - e^y)^2$$

   per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Assegnata la curva parametrica $\gamma(t) = (1 - \cos t,\ t - \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

   (a) si calcoli l'integrale su γ della forma differenziale

   $$\omega(x,y) = \frac{y+1}{(x+y+1)^2}\,dx - \frac{x}{(x+y+1)^2}\,dy\,;$$

   (b) si calcoli l'area della superficie ottenuta da una rotazione completa del sostegno di γ intorno all'asse y.

4. Sia $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$.

   (a) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\iiint_T \frac{x\,z}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy\,dz\,;$

   (b) assegnato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, si determini il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ uscente attraverso la frontiera di T.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

10 gennaio 2022

1. Si studino continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \frac{y\,|x^2-4|}{x^2+2\,y^2+1}\,.$$

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo
$$f(x,y) = 4\,(x-y)^2 - x^4 - y^4$$
per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Assegnata la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{y-2\sqrt{x}}{2\,x\,(y-\sqrt{x})}\,dx + \frac{1}{y-\sqrt{x}}\,dy\,,$$
   (a) si stabilisca se ω è esatta nel proprio insieme di definizione; in caso affermativo, se ne determini una primitiva;
   (b) si calcoli l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (1+3\,t, 2+t)$, $t \in [0,1]$.

4. Si calcoli l'integrale
$$\iiint_T \ln(x^2+y^2+1)\,z\,dx\,dy\,dz\,,$$
dove T è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$ e il piano di equazione $z = 9$.

5. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ uscente attraverso la frontiera del cubo $T = [0,2]^3$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

25 gennaio 2022

1. Si studi la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione definita ponendo

$$f(x,y) = e^{-|x-y|\,y}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

$$f(x,y) = x^2\,y\,e^{x+3\,y}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Si calcoli l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(2\,x - \frac{y}{x+1}\right)\,dx - \ln(x+1)\,dy\,,$$

sulla curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^2 - 2\,t + 2, t)$, $t \in [0,2]$.

4. Si calcoli l'integrale

$$\iint_D x\,\ln(y)\,dx\,dy\,,$$

dove D è il triangolo di vertici $(0,1)$, $(0,2)$ e $(2,1)$.

5. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,-x,1)$ che attraversa la porzione di paraboloide $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ z \le 1\}$ dall'alto verso il basso.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II

22 febbraio 2022

1. Si stabilisca se la funzione definita ponendo

$$f(x,y) = x\,y\,\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

è differenziabile in $(1,0)$.
Si stabilisca inoltre se f è dotata di derivate seconde in $(1,0)$; in caso affermativo, le si calcolino.

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

$$f(x,y) = x^3\,y + x^2\,y - y^3\,.$$

3. Si stabilisca se la forma differenziale definita ponendo

$$\omega(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x-2\,y)^2}}\,dx - \frac{2}{\sqrt{1-(x-2\,y)^2}}\,dy$$

è esatta nel proprio dominio.
Si calcoli inoltre l'integrale curvilineo di ω lungo la curva parametrica

$$\gamma(t) = \left(t,\ t - \frac{t^2}{2}\right), \qquad t \in [0,1].$$

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, x^2\,y, x^2\,z)$$

uscente attraverso la frontiera dell'insieme

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \le 4\,,\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

Si applichi inoltre il teorema della divergenza per verificare il risultato ottenuto.