

Corso di Laurea Triennale in Fisica – esame di **Analisi Matematica II**

Programma dettagliato **a.a. 2024/2025** (prof. Monica Lazzo)

Equazioni differenziali lineari

Terminologia: equazioni differenziali lineari omogenee, non omogenee, a coefficienti costanti; integrale generale, integrale particolare; problema di Cauchy. Equazioni di ordine 1: determinazione dell'integrale generale. Equazioni di ordine 2: principio di sovrapposizione, struttura dell'integrale generale*. Equazioni differenziali a coefficienti costanti: polinomio caratteristico; determinazione dell'integrale generale di equazioni omogenee*; metodo di somiglianza per la determinazione di integrali particolari di equazioni non omogenee.

Spazi metrici

Metriche in un insieme; spazi metrici; sottospazi metrici. Intorni sferici; punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione. Interiore, frontiera, derivato, chiusura. Insiemi aperti, insiemi chiusi. Insiemi limitati. Successioni convergenti; unicità del limite*. Successioni di Cauchy; proprietà*. Spazi metrici completi. Spazi metrici sequenzialmente compatti. Legame tra compattezza, completezza, chiusura e limitatezza*. Spazi metrici connessi.

Funzioni continue tra spazi metrici. Continuità e composizione funzionale. Teorema di Weierstrass; teorema di Cantor; teorema dei valori intermedi.

Spazi normati; metrica indotta da una norma. Spazi con prodotto scalare; norma indotta da un prodotto scalare.

Lo spazio euclideo $\mathbf{R}^n$

Richiami su $\mathbf{R}^n$: struttura di spazio vettoriale, prodotto scalare standard, norma e metrica euclidea. Prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$.

Successioni convergenti in $\mathbf{R}^n$. Operazioni algebriche con successioni convergenti. Teorema di Bolzano-Weierstrass*. Completezza dello spazio metrico euclideo*. Teorema di Heine-Borel*.

Segmenti, poligoni. Insiemi convessi, stellati, connessi per poligoni. Insiemi semplicemente connessi. Domini regolari in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$.

Funzioni tra spazi euclidei

Funzioni scalari; funzioni vettoriali e loro componenti. Operazioni algebriche con funzioni vettoriali.

Limiti per funzioni scalari e vettoriali di una o più variabili reali; limiti all'infinito e funzioni divergenti in norma. Proprietà dei limiti.

Funzioni continue tra spazi euclidei. Continuità e operazioni algebriche. Caratterizzazione della continuità mediante i limiti.

Calcolo differenziale

Derivate direzionali. Derivate parziali. Gradiente. Funzioni differenziabili; differenziale. Continuità delle funzioni differenziabili*. Differenziale e derivate direzionali*; formula del gradiente. Teorema del differenziale totale*. Linearizzazione e piano tangente. Derivate e differenziale di funzioni vettoriali. Matrice jacobiana. Regole di calcolo per le derivate parziali. Differenziale di funzioni composte. Teorema del valor medio*. Caratterizzazione delle funzioni a gradiente nullo*.

Derivate parziali successive. Matrice hessiana. Teorema di Schwarz. Funzioni di classe C^2 . Polinomio di Taylor di ordine 2; formula di Taylor con il resto di Peano.

Ottimizzazione libera e vincolata

Punti di estremo locale per funzioni reali di più variabili reali. Teorema di Fermat*. Punti stazionari; punti

di sella. Relazione tra la natura di un punto stazionario e il segno degli autovalori della matrice hessiana*. Condizioni sufficienti per la classificazione di punti stazionari.

Estremi vincolati per funzioni di due o tre variabili. Teorema delle funzioni implicite in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di due e di tre variabili.

Calcolo integrale

Integrale di Riemann per funzioni vettoriali di una variabile.

Insiemi normali in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$. Misura degli insiemi normali. Suddivisioni in insiemi normali; proprietà. Somme integrali e loro proprietà*. Funzioni integrabili; integrali multipli. Integrabilità delle funzioni continue. Proprietà degli integrali: linearità, monotonia, additività. Formule di riduzione per integrali doppi e per integrali tripli (per fili e per strati). Volume dei solidi di rotazione. Cambiamento di variabili negli integrali multipli. Coordinate polari e coordinate ellittiche nel piano; coordinate polari nello spazio.

Integrali curvilinei e di superficie

Curve in $\mathbf{R}^n$; sostegno e parametrizzazione. Curve chiuse, semplici, piane. Curve grafico. Curve regolari, quasi regolari e regolari a tratti; versore tangente. Cambiamenti di parametro; curve equivalenti. Concatenamento di curve.

Integrali curvilinei di campi scalari; proprietà di invarianza. Interpretazione geometrica dell'integrale curvilineo. Lunghezza di una curva regolare. Integrali curvilinei di campi vettoriali; proprietà di invarianza. Campi vettoriali conservativi; potenziali. Formula fondamentale del calcolo integrale per campi vettoriali*. Caratterizzazioni dei campi vettoriali conservativi. Campi vettoriali chiusi. Teorema di Poincaré. Campi vettoriali chiusi in insiemi semplicemente connessi*.

Superfici in $\mathbf{R}^3$; sostegno e parametrizzazione. Superfici grafico. Superfici regolari e regolari a pezzi. Piano tangente; versore normale. Superfici orientabili. Superfici regolari con bordo; superfici chiuse. Cambiamenti di parametro; superfici equivalenti.

Integrali di superficie di campi scalari; proprietà di invarianza. Area di una superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie; proprietà di invarianza.

Rotore di un campo vettoriale; teorema di Stokes. Divergenza di un campo vettoriale; teorema di Gauss. Teorema di Gauss-Green; calcolo di aree mediante integrali curvilinei.

Note

Gli argomenti sono raggruppati per attinenza; l'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.

La dimostrazione dei risultati contrassegnati con * è parte integrante del programma.

Testi consigliati per consultazione

- G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica Volume 2, Zanichelli
- V. Barutello, M. Conti, D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Vol. 2, Apogeo
- N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Lezioni di analisi matematica due, Zanichelli
- E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri
- C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 2, Zanichelli
- L. Recine, M. Romeo, Esercizi di analisi matematica Vol. II, Maggioli Editore
- S. Salsa, A. Squellati, Esercizi di Analisi matematica 2, Zanichelli
- W. Rudin, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill
- W.E. Boyce, R.C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, Wiley
- S.H. Saperstone, Introduction to ordinary differential equations, Brooks/Cole Publishing Company