Corso di Laurea Triennale in Fisica

Esame di **Analisi Matematica II**

a.a. 2022/2023 – programma dettagliato

prof.ssa Monica Lazzo

Equazioni differenziali lineari

Terminologia: equazioni differenziali lineari omogenee, non omogenee, a coefficienti costanti; integrale generale, integrale particolare. Problema di Cauchy. Globalità e regolarità delle soluzioni. Esistenza e unicità globale per problemi di Cauchy. Operatore associato a una equazione differenziale lineare. Principio di sovrapposizione. Struttura dell'integrale generale*. Matrice wronskiana e determinante wronskiano. Caratterizzazione di un sistema fondamentale di soluzioni*. Equazioni differenziali a coefficienti costanti: polinomio caratteristico ed equazione caratteristica; determinazione dell'integrale generale di equazioni omogenee*; metodo di somiglianza per la determinazione di integrali particolari di equazioni non omogenee. Metodo di variazione delle costanti per la determinazione di integrali particolari di equazioni differenziali lineari non omogenee. Equazioni di Eulero.

Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^n$

Richiami su $\mathbf{R}^n$: struttura di spazio vettoriale, prodotto scalare standard, norma e metrica euclidea. Spazio duale.

Intorni sferici. Punti interni, esterni, di frontiera. Interiore, frontiera, chiusura di un insieme. Punti di accumulazione; derivato di un insieme. Insiemi aperti e insiemi chiusi; proprietà. Insiemi limitati. Successioni convergenti in $\mathbf{R}^n$. Operazioni algebriche con successioni convergenti. Successioni estratte. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Teorema di Heine-Borel*; insiemi sequenzialmente compatti.

Segmenti, poligonali, archi. Insiemi convessi, stellati, connessi per poligonali, connessi per archi. Insiemi semplicemente connessi. Domini regolari in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$.

Funzioni tra spazi vettoriali euclidei

Funzioni scalari; funzioni vettoriali e loro componenti. Operazioni algebriche con funzioni vettoriali.

Funzioni continue. Continuità e operazioni algebriche. Continuità e composizione funzionale. Teorema di Weierstrass*; teorema di Cantor; teorema dei valori intermedi*.

Limiti per funzioni scalari e vettoriali di una o più variabili reali; limiti all'infinito e funzioni divergenti in norma. Proprietà dei limiti. Caratterizzazione della continuità mediante i limiti.

Calcolo differenziale

Derivate direzionali. Derivate parziali. Gradiente. Funzioni differenziabili; differenziale. Differenziale e derivate direzionali*. Rappresentazione del differenziale nello spazio duale di $\mathbf{R}^n$. Formula del gradiente. Caratterizzazione della differenziabilità. Continuità delle funzioni differenziabili*. Teorema del differenziale totale*. Linearizzazione e piano tangente. Derivate e differenziale di funzioni vettoriali. Matrice jacobiana. Regole di calcolo per le derivate parziali. Differenziale di funzioni composte. Teorema del valor medio*. Caratterizzazione delle funzioni a gradiente nullo*.

Derivate parziali successive. Matrice hessiana. Teorema di Schwarz. Funzioni di classe C^k. Polinomio di Taylor di ordine 2; formula di Taylor con il resto di Peano.

Ottimizzazione libera e vincolata

Punti di estremo locale per funzioni reali di più variabili reali. Teorema di Fermat*. Punti stazionari; punti di sella. Matrici simmetriche definite positive, definite negative, indefinite. Relazione tra la natura di un punto stazionario e il segno degli autovalori della matrice hessiana*. Condizioni sufficienti per la classificazione di punti stazionari*.
Estremi vincolati per funzioni di due o tre variabili. Teorema delle funzioni implicite in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di due variabili* e per funzioni di tre variabili.

Calcolo integrale

Integrale di Riemann per funzioni vettoriali di una variabile.
Iperrettangoli in $\mathbf{R}^n$ e loro misura. Suddivisioni di un iperrettangolo. Funzioni a scala. Integrale di una funzione a scala; proprietà. Integrale di Riemann di funzioni limitate in iperrettangoli. Caratterizzazione dell'integrabilità.
Plurirettangoli in $\mathbf{R}^n$ e loro misura. Misura interna e misura esterna di insiemi limitati. Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Caratterizzazioni della misurabilità. Insiemi trascurabili. Caratterizzazione degli insiemi misurabili mediante la frontiera*. Caratterizzazione degli insiemi misurabili mediante funzioni caratteristiche*. Proprietà della misura*.
Integrale di funzioni limitate in insiemi misurabili. Classi di funzioni integrabili. Integrali e insiemi trascurabili. Proprietà degli integrali: linearità, monotonia, additività.
Insiemi normali in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$. Formule di riduzione per integrali doppi e per integrali tripli (per fili e per strati). Volume dei solidi di rotazione. Cambiamento di variabili negli integrali multipli. Coordinate polari nel piano e nello spazio; coordinate polari ellittiche; coordinate cilindriche.

Integrali curvilinei e di superficie

Curve in $\mathbf{R}^n$; sostegno e parametrizzazione. Curve chiuse, semplici, piane. Curve grafico. Curve regolari, quasi regolari e regolari a tratti; versore tangente. Cambiamenti di parametro; curve equivalenti. Concatenamento di curve.
Integrali curvilinei di campi scalari; proprietà di invarianza. Interpretazione geometrica dell'integrale curvilineo. Lunghezza di una curva regolare. Integrali curvilinei di campi vettoriali; proprietà di invarianza. Teorema di Gauss-Green nel piano. Calcolo di aree mediante integrali curvilinei. Forme differenziali associate a campi vettoriali. Forme differenziali esatte; primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale per forme differenziali*. Caratterizzazioni delle forme differenziali esatte. Forme differenziali chiuse. Teorema di Poincaré. Forme differenziali chiuse in insiemi semplicemente connessi.
Superfici in $\mathbf{R}^3$; sostegno e parametrizzazione. Superfici grafico. Superfici regolari e regolari a pezzi. Piano tangente; versore normale. Superfici orientabili. Superfici regolari con bordo; superfici chiuse. Cambiamenti di parametro; superfici equivalenti.
Integrali di superficie di campi scalari; proprietà di invarianza. Area di una superficie. Area delle superfici di rotazione. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie; proprietà di invarianza. Divergenza di un campo vettoriale; teorema di Gauss. Rotore di un campo vettoriale; teorema di Stokes.

Note

Gli argomenti sono raggruppati per attinenza; l'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.
La dimostrazione dei risultati contrassegnati con * è parte integrante del programma.

Testi consigliati per consultazione

- A. Bacciotti, F. Ricci, Lezioni di Analisi Matematica 2, Ed. Levrotto&Bella
- G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica Volume 2, Zanichelli
- V. Barutello, M. Conti, D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Vol. 2, Apogeo
- W.E. Boyce, R.C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, Wiley
- N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Lezioni di analisi matematica due, Zanichelli
- E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri
- C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 2, Zanichelli
- L. Recine, M. Romeo, Esercizi di analisi matematica Vol. II, Maggioli Editore
- W. Rudin, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill
- W.E. Boyce, R.C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, Wiley
- S.H. Saperstone, Introduction to ordinary differential equations, Brooks/Cole Publishing Company