

Corso di Laurea Triennale in Fisica
Esame di **Analisi Matematica II**
a.a. 2021/2022 – programma dettagliato
prof.ssa Monica Lazzo

Equazioni differenziali lineari

Terminologia: equazioni differenziali lineari omogenee, non omogenee, a coefficienti costanti; integrale generale, integrale particolare. Problema di Cauchy. Globalità e regolarità delle soluzioni. Esistenza e unicità globale per problemi di Cauchy. Operatore associato a una equazione differenziale lineare. Principio di sovrapposizione. Struttura dell'integrale generale*. Matrice wronskiana e determinante wronskiano. Caratterizzazione di un sistema fondamentale di soluzioni*. Equazioni differenziali a coefficienti costanti: polinomio caratteristico ed equazione caratteristica; determinazione dell'integrale generale di equazioni omogenee*; metodo di somiglianza per la determinazione di integrali particolari di equazioni non omogenee. Metodo di variazione delle costanti per la determinazione di integrali particolari di equazioni differenziali lineari non omogenee*. Equazioni di Eulero.

Lo spazio vettoriale euclideo \mathbf{R}^n

Richiami su \mathbf{R}^n : struttura di spazio vettoriale, prodotto scalare standard, norma e metrica euclidea. Spazio duale di \mathbf{R}^n .

Intorni sferici. Punti interni, esterni, di frontiera. Interiore, frontiera, chiusura di un insieme. Punti di accumulazione; derivato di un insieme. Insiemi aperti e insiemi chiusi; proprietà. Insiemi limitati; diametro di un insieme. Successioni convergenti in \mathbf{R}^n . Operazioni algebriche con successioni convergenti. Caratterizzazione mediante successioni del derivato e della chiusura di un insieme*. Successioni estratte. Insiemi compatti e sequenzialmente compatti; teorema di Heine-Borel.

Segmenti, poligonalità, archi. Insiemi convessi, stellati, connessi per poligonalità, connessi per archi, connessi.

Funzioni tra spazi vettoriali euclidei

Funzioni scalari; funzioni vettoriali e loro componenti. Operazioni algebriche con funzioni vettoriali.

Funzioni continue. Continuità e operazioni algebriche. Continuità e composizione funzionale. Caratterizzazioni della continuità. Teorema di Weierstrass*; teorema di Cantor; teorema dei valori intermedi*.

Limiti per funzioni scalari e vettoriali di una o più variabili reali; limiti all'infinito e funzioni divergenti in norma. Proprietà dei limiti. Caratterizzazione della continuità mediante i limiti.

Derivate direzionali. Derivate parziali. Gradiente. Derivate parziali successive. Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Funzioni di classe C^k . Funzioni differenziabili; differenziale. Continuità delle funzioni differenziabili*. Differenziale e derivate direzionali; formula del gradiente*. Teorema del differenziale totale*. Caratterizzazione della differenziabilità; rappresentazione del differenziale nello spazio duale di \mathbf{R}^n . Linearizzazione e piano tangente. Derivate e differenziale di funzioni vettoriali. Matrice jacobiana. Regole di calcolo per le derivate parziali e per il differenziale. Differenziale di funzioni composte*. Teorema del valor medio*. Caratterizzazione delle funzioni a differenziale nullo*.

Integrali multipli

Plurintervalli di \mathbf{R}^n e loro misura. Proprietà della misura dei plurintervalli. Misura interna e misura esterna di insiemi limitati. Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Caratterizzazioni della misurabilità*. Finita additività della misura*. Misura e operazioni insiemistiche. Interiore e chiusura di insiemi misurabili*. Insiemi trascurabili; caratterizzazione degli insiemi misurabili mediante la frontiera*. Misura in spazi prodotto.

Misurabilità e misura di insiemi illimitati. Formula per il calcolo della misura di un insieme misurabile illimitato*.

Partizioni misurabili. Partizione generata da due partizioni misurabili. Somme di Riemann inferiori e superiori. Funzioni integrabili secondo Riemann; integrale di Riemann. Classi di funzioni integrabili. Proprietà degli integrali: linearità, monotonia, additività. Teorema della media integrale*.

Insiemi normali in \mathbf{R}^2 e in \mathbf{R}^3 . Formule di riduzione per integrali doppi* e per integrali tripli (per fili e per strati). Volume dei solidi di rotazione. Cambiamento di variabili negli integrali multipli. Coordinate polari nel piano e nello spazio; coordinate polari ellittiche; coordinate cilindriche.

Integrali curvilinei e di superficie

Curve in \mathbf{R}^n ; sostegno e parametrizzazioni. Proprietà del sostegno. Curve piane, chiuse, aperte, semplici. Curve regolari, quasi regolari e regolari a tratti; versore tangente. Curve grafico. Curve assegnate mediante coordinate polari. Concatenamento di curve. Curve rettificabili; lunghezza di una curva. Lunghezza per curve di classe C^1 . Cambiamenti di parametro; curve equivalenti. Ascissa curvilinea.

Integrali curvilinei di prima specie; proprietà. Forme differenziali. Integrali curvilinei di seconda specie; proprietà. Forme differenziali esatte; primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale per forme differenziali*. Caratterizzazioni delle forme differenziali esatte*. Forme differenziali chiuse; teorema di Poincaré. Forme differenziali chiuse in insiemi semplicemente connessi.

Superfici in \mathbf{R}^3 ; sostegno e parametrizzazioni. Proprietà del sostegno. Superfici regolari e regolari a pezzi. Piano tangente; versore normale. Superfici orientabili. Superfici regolari con bordo; superfici chiuse. Cambiamenti di parametro; superfici equivalenti. Area di una superficie. Superfici grafico. Superfici di rotazione. Integrali di superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

Rotore di un campo vettoriale; teorema di Stokes. Divergenza di un campo vettoriale; teorema della divergenza. Teorema di Gauss-Green nel piano. Calcolo di aree mediante integrali curvilinei di seconda specie.

Note

Gli argomenti sono raggruppati per attinenza; l'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.

La dimostrazione dei risultati contrassegnati con * è parte integrante del programma.

Testi consigliati

G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica Volume 2, Zanichelli

V. Barutello, M. Conti, D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Vol. 2, Apogeo

W.E. Boyce, R.C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, Wiley

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Lezioni di analisi matematica due, Zanichelli

E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri

C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 2, Zanichelli

W. Rudin, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill