Corso di Laurea Triennale in Fisica

Esame di **Analisi Matematica II**

a.a. 2020/2021 – programma definitivo

prof.ssa Monica Lazzo

Spazi metrici

Metriche in un insieme. Spazi metrici. Sottospazi metrici. Intorni. Punti interni, esterni, di frontiera. Interiore; insiemi aperti. Punti di accumulazione; derivato; insiemi chiusi. Operazioni insiemistiche con insiemi aperti e insiemi chiusi. Insiemi limitati. Successioni convergenti. Unicità del limite. Caratterizzazione sequenziale degli insiemi chiusi. Convergenza in sottospazi metrici. Successioni estratte. Successioni di Cauchy. Proprietà delle successioni di Cauchy*. Spazi metrici completi. Completezza e chiusura. Spazi metrici sequenzialmente compatti. Legame tra compattezza, completezza, chiusura e limitatezza*. Spazi metrici connessi. Funzioni continue. Proprietà delle funzioni continue rispetto all'immagine reciproca e rispetto alla composizione funzionale. Teorema di Weierstrass*; teorema di Cantor; teorema dei valori intermedi*. Spazi normati; spazi di Banach. Spazi con prodotto scalare; spazi di Hilbert.

Funzioni di più variabili

Lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$ e il suo duale. Prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$; norma e metrica euclidea. Norma del reticolo e del massimo. Insiemi convessi, stellati, connessi per poligonali. Convergenza in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$; teorema di Heine-Borel*. Completezza di $\mathbb{R}^n$.

Funzioni reali e funzioni vettoriali di più variabili reali. Definizioni equivalenti di limite, con intorni e per successioni. Banalità del limite per funzioni vettoriali. Proprietà delle funzioni continue: continuità e operazioni algebriche, continuità e composizione funzionale, caratterizzazione della continuità mediante i limiti. Strategie per il calcolo del limite di funzioni di più variabili.

Derivate direzionali. Derivate parziali. Funzioni di classe C^1. Funzioni differenziabili; differenziale. Differenziale e derivate direzionali*. Gradiente; formula del gradiente. Caratterizzazione della differenziabilità. Continuità delle funzioni differenziabili*. Teorema del differenziale totale*. Piano tangente. Derivate direzionali e parziali per funzioni vettoriali. Differenziale di funzioni vettoriali. Matrice jacobiana. Regole di calcolo per il differenziale. Differenziale e composizione funzionale*. Derivate parziali successive. Matrice hessiana. Teorema di Schwarz. Funzioni di classe C^2.

Teorema del valor medio*. Teorema sulle funzioni a differenziale nullo*. Teorema degli incrementi finiti. Polinomio di Taylor di ordine 2; formula di Taylor con il resto di Peano.

Punti di estremo locale. Teorema di Fermat*. Punti stazionari. Punti di sella. Caratterizzazione del minimo e del massimo autovalore di una matrice simmetrica*. Matrici definite positive, definite negative, indefinite. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per punti di estremo locale*. Estremi vincolati sul sostegno di una curva o sul sostegno di una superficie. Teorema delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

Integrali multipli

Plurintervalli in $\mathbb{R}^n$ e loro misura. Misura interna e misura esterna di un insieme limitato. Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Caratterizzazioni degli insiemi misurabili. Proprietà degli insiemi misurabili.

Suddivisioni misurabili. Somme di Riemann inferiori e superiori. Funzioni integrabili secondo Riemann; integrale di Riemann. Caratterizzazione della integrabilità. Condizioni sufficienti per la integrabilità. Proprietà degli integrali: linearità, monotonia, additività. Media integrale.

Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Formule di riduzione per integrali doppi e per integrali tripli (per fili e per strati). Volume dei solidi di rotazione. Cambiamento di variabili negli integrali multipli. Coordinate polari nel piano e nello spazio; coordinate polari ellittiche; coordinate cilindriche.

Integrali curvilinei e di superficie
Curve parametriche. Curve piane assegnate mediante equazione polare. Curve regolari e regolari a tratti; versore tangente. Curve semplici. Curve chiuse. Curve rettificabili; lunghezza di una curva. Lunghezza per curve di classe C^1 *. Cambiamenti di parametro. Curve equivalenti. Ascissa curvilinea. Integrali curvilinei di prima specie; proprietà. Calcolo di massa e baricentro.
Forme differenziali; forme differenziali esatte. Integrali curvilinei di seconda specie; proprietà. Formula fondamentale del calcolo integrale per forme differenziali*. Caratterizzazioni delle forme differenziali esatte*. Forme differenziali chiuse. Teorema di Poincaré*. Esattezza delle forme differenziali chiuse in domini piani semplicemente connessi.
Superfici parametriche. Superfici regolari e regolari a tratti. Piano tangente; versore normale. Superfici con bordo e superfici chiuse. Superfici equivalenti. Area di una superficie. Superfici grafico di funzioni reali. Superfici di rotazione; teorema di Guldino. Integrali di superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.
Domini regolari in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Teorema di Gauss-Green nel piano. Calcolo di aree mediante integrali curvilinei di seconda specie. Integrazione per parti per funzioni di due variabili. Rotore di un campo vettoriale; teorema di Stokes. Divergenza di un campo vettoriale; teorema della divergenza.

Note
Gli argomenti sono raggruppati per attinenza; l'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.
La dimostrazione dei risultati contrassegnati con * è parte integrante del programma.

Testi consigliati
A. Bacciotti, F. Ricci, Lezioni di analisi matematica 2, Levrotto & Bella
G. C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica Volume 2, Zanichelli
E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri
C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 2, Zanichelli
W. Rudin, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill