4 giugno 2025

Esempi

- $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3 \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\forall (x,y)$:

$$f_x(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$f_y(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(3x^2 + 2xy + y^2) = 0 \\ x(x^2 + 2xy + 3y^2) = 0 \end{cases}$$

1°: $\begin{cases} y = 0 \\ x(x^2) = 0 \end{cases} \quad x = 0 \quad \to \quad (0,0)$

2°: $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ x(x^2 + 2xy + 3y^2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to (0,0)$

$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$ $\odot$

$\odot \iff \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 0 \end{cases} \quad x^2 = y^2$ $\begin{cases} x = y \\ y^2 + 2y^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} \to (0,0)$

$\begin{cases} x = -y \\ y^2 - 2y^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} \to (0,0)$

Quindi: $(0,0)$ unico punto stazionario

INUTILE!!

Matrice hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = 6xy + 2y^2 \qquad f_{xy}(x,y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2$$
$$f_{yy}(x,y) = 2x^2 + 6xy$$

$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 0 \to v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(t) = f(t, 0) \equiv 0$??

$= 0 \iff x + \frac{y}{2} = 0$ e

$\frac{\sqrt{3}}{2} y = 0 \iff$

$x = y = 0$

- $\lambda = 0 \to v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

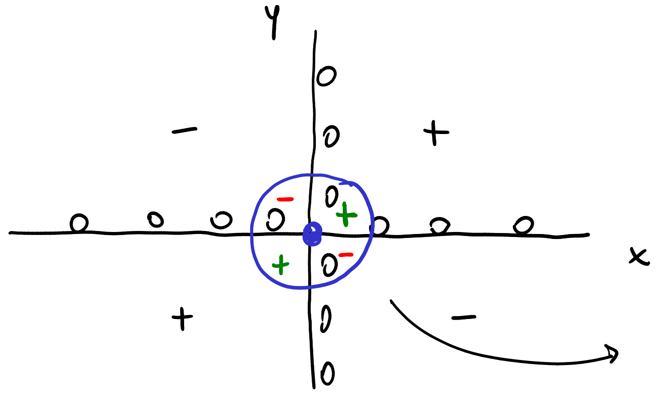
$$\varphi(t) = f(0,t) \equiv 0$$

??

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y\right)^2 \geq 0$$

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4} y^2$$

$$f(x,y) = x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 = xy \underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{\text{"falso quadrato"}}$$



$(0,0)$ né punto di max, né punto di min

$\Rightarrow (0,0)$ punto di sella

- $f(x,y) = 24x^4 + 3y^4 - (x-y)^2 \qquad f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\forall (x,y)$:
$$f_x(x,y) = 96x^3 - 2(x-y)$$
$$f_y(x,y) = 12y^3 + 2(x-y)$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 48x^3 - (x-y) = 0 \\ 6y^3 + (x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48x^3 + 6y^3 = 0 \\ 6y^3 + x - y = 0 \end{cases} \qquad 8x^3 + y^3 = 0 \qquad y^3 = -8x^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -48x^3 + 3x = 0 \end{cases} \qquad 16x^3 - x = 0 \qquad x(16x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \text{opp.} \quad \begin{matrix} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{opp.} \quad \begin{matrix} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Tre punti staz: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Matrice hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = 288x^2 - 2, \quad f_{xy}(x,y) = 2, \quad f_{yy}(x,y) = 36y^2 - 2$$

Classifico $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Autovalori:

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 4 = \lambda(\lambda+4)$$

$$\underbrace{\lambda = -4}_{\Updownarrow \ \text{max loc.}} \qquad \lambda = 0$$

Determino un autovettore corrispondente a $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left[\ (M - \lambda I)\underbrace{v}_{\neq 0} = 0 \ \right]$$

$$-2v_1 + 2v_2 = 0 \qquad v_1 = v_2$$

$$(\ 2v_1 - 2v_2 = 0\ ) \qquad \text{Scelgo } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considero la restrizione di f alla retta passante per $(0,0)$ individuata da $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,1)) = f(t,t) = 24t^4 + 3t^4 - (t-t)^2$$
$$= 27t^4$$

$t = 0$ punto di minimo per φ

$\Leftrightarrow$ $(0,0)$ è punto di minimo per la restrizione di f alla retta ...

Ciò contraddice quanto detto per l'autovalore $\lambda = -4$, quindi: $(0,0)$ è un punto di sella.

Classifico $\left(\pm \frac{1}{4}, \mp \frac{1}{2} \right)$

$$H_f\left(\pm\frac{1}{4}, \mp\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 288\cdot\frac{1}{16} - 2 & 2 \\ 2 & 36\cdot\frac{1}{4} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Autovalori :

$$\det\begin{pmatrix} 16-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (16-\lambda)(7-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 \underbrace{-}_{\text{var.}} 23\lambda \underbrace{+}_{\text{var.}} \underbrace{16\cdot 7 - 4}_{>0}$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$

$\Rightarrow$ punti di minimo locale.

⌜ Anche globale? Si!
Suggerimento : provare che
$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$ ⌟

- $f(x,y) = x^4 + x^2 y + y^2 + 3$ $\qquad f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\forall (x,y)$:

$f_x(x,y) = 4x^3 + 2xy \qquad f_y(x,y) = x^2 + 2y$

Punti stazionari :

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x\,(2x^2 + y) = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + 2y = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases} \to (0,0)$$

$(0,0)$ unico punto staz.

Hessiana :

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 2y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x, \quad f_{yy}(x,y) = 2$

$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$>0 \;\longrightarrow$ min. loc. (?)

Matrice diagonale $\Rightarrow$ $\lambda = 0 \;\rightarrow\; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(t) = f(t,0) = t^4 + 3$ In $t=0$ ha minimo.

Questo è coerente con la congettura ma non la dimostra.

Provo a verificare se $(0,0)$ è punto di min. loc. usando la definizione:

? $\quad f(x,y) \geq f(0,0)$ è vera almeno in un intorno di $(0,0)$?

$$\Updownarrow$$

$$x^4 + x^2 y + y^2 + 3 \geq 3 \iff$$

$$x^4 + x^2 y + y^2 \geq 0$$

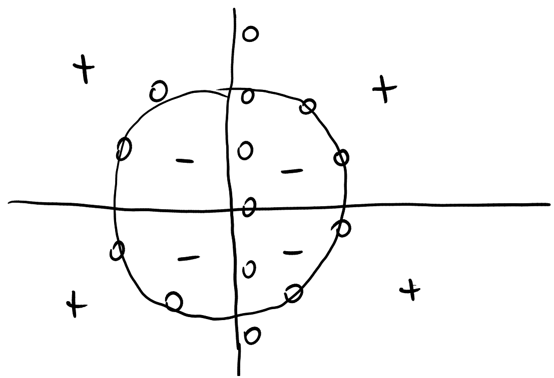
$$(x^2)^2 + \overset{''}{x^2 y} + y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

"finto quadrato"

Conclusione: $(0,0)$ è punto di minimo globale.

- $f(x,y) = x^4 + x^2(y^2 - 1) \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\qquad = x^2(x^2 + y^2 - 1)$



$\forall (x,y)$: $\quad f_x(x,y) = 4x^3 + 2x(y^2-1)$

$\qquad\qquad f_y(x,y) = 2x^2y$

Punti staz :

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^3 + x(y^2-1) = 0 \\ x^2 y = 0 \end{cases}$$

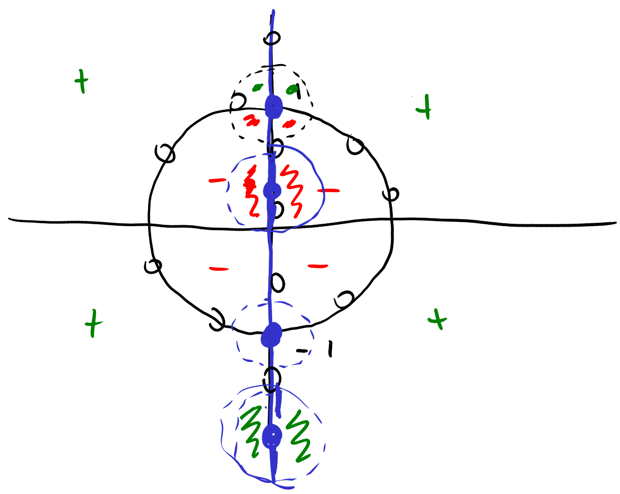
1° : $\begin{cases} \text{identità} \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow (0,\beta) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

2° : $\begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad x(2x^2-1) = 0$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad 2x^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$

Punti staz :

$(0,\beta) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

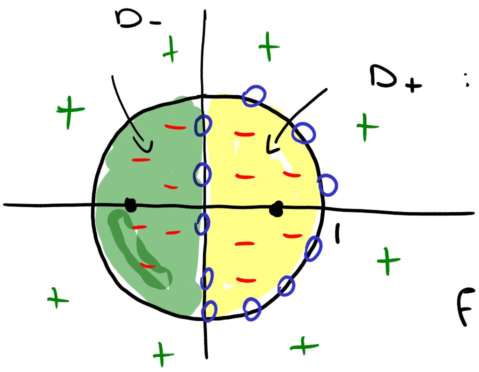
Classifico $(0,\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$:



Dal segno di f deduco che :

$(0,\beta)$ è
- punto di max loc. per $|\beta| < 1$
- punto di sella per $|\beta| = 1$
- punto di min. loc. per $|\beta| > 1$

Per classificare $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, posso usare la matrice hessiana (che risulta, a conti fatti, definita e quindi permette di concludere), oppure fare un ragionamento "Weierstrass + Fermat".



$D_+ := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

D_+ : chiuso, limitato

$\Rightarrow$ compatto

$f|_{D_+}$ continua $\Rightarrow$

$f|_{D_+}$ ammette max e min

Dal segno: $\max f|_{D_+} = 0$ (assunto in ∂D_+)

$\Rightarrow$ $\min f|_{D_+}$ deve essere assunto in un punto interno a D_+ $\Rightarrow$ tale punto è stazionario

Siccome l'unico punto staz. in D_+ è $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, deduco che tale punto è di minimo globale per $f|_{D_+}$, quindi di minimo locale per f.

In realtà è globale perché al di fuori del disco f è positiva.

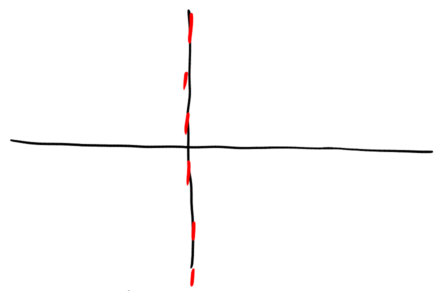
Stessa conclusione per $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Esempi

- $f(x,y) = (x+y)^3 |x|$ $A := \{(x,y) \mid x \neq 0\}$ aperto

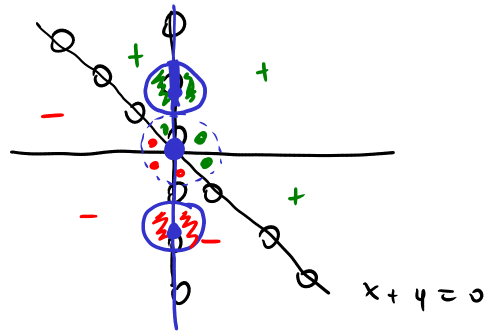
f continua in $\mathbb{R}^2$

$f \in C^2(A, \mathbb{R})$



Nei punti $(0,\beta)$, con $\beta \in \mathbb{R}$, non è garantita la differenziabilità di f; li metto "d'ufficio" tra i candidati. (e li studio

SENZA utilizzare la matrice hessiana)



Studio $(0,\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$

Dal segno deduco che:

- $(0,0)$ non è né di max né di min.

(non lo chiamo "punto di sella" perché non so se è stazionario, perché non so nemmeno se f è differenziabile in tale punto)

- $(0,\beta)$, $\beta > 0$: punto di min. loc.
- $(0,\beta)$, $\beta < 0$: punto di max loc.

Ora cerco i punti stazionari in A: $x \neq 0$ $\quad (x+y)^3 |x|$

$$f_x(x,y) = 3(x+y)^2 |x| + (x+y)^3 \operatorname{sign}(x)$$

$$f_y(x,y) = 3(x+y)^2 |x|$$

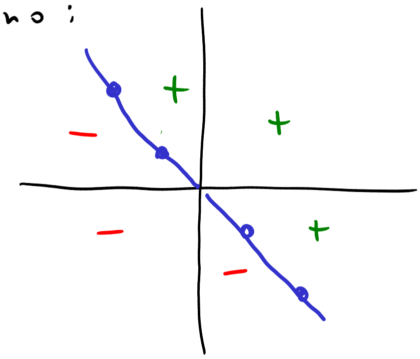
$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sign}(x) \, (3x + x + y) = 0 \\ 3(x+y)^2 \underbrace{|x|}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \iff (x+y)^2 = 0$$

identiti

Tutti i punti della retta $x+y=0$ (a eccezione di $x=0$) sono stazionari.

Li classifico in base al segno:

sono tutti punti di sella.

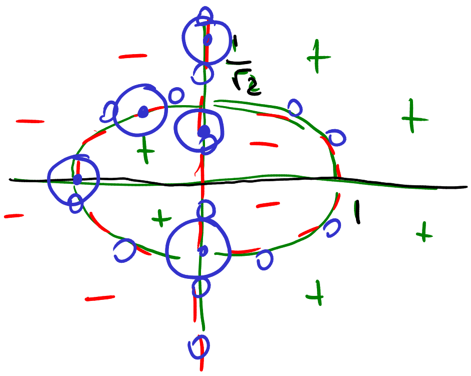


- $f(x,y) = (x^3 + 2xy^2 - x)^{1/3}$

$f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$f \in C^2(A, \mathbb{R})$ con $A := \{(x,y) \mid x^3 + 2xy^2 - x \neq 0\}$ ← aperto

$x^3 + 2xy^2 - x = x(x^2 + 2y^2 - 1)$



Considero tutti candidati punti di estremo i punti dell'asse y e dell'ellisse

Dal segno, deduco che tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus A$ non sono né di max, né di min.

Ora cerco i punti staz. in A: $(x^3 + 2xy^2 - x)^{1/3}$

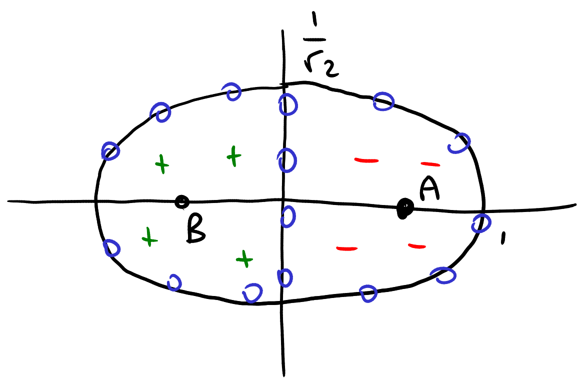
$\forall (x,y) \in A$:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}(\overbrace{x^3 + 2xy^2 - x}^{\neq 0})^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 2y^2 - 1)$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{3}(\underbrace{x^3 + 2xy^2 - x}_{\neq 0})^{-\frac{2}{3}} \underbrace{4xy}_{\neq 0}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad 3x^2 - 1 = 0$$

Trovo: $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$



"W + F" ⟹

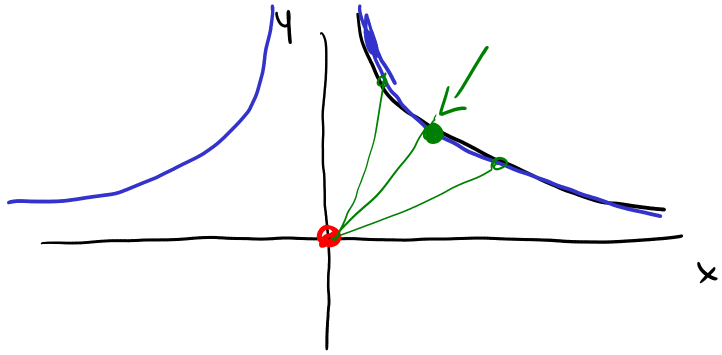
A punto di min. loc.

B punto di max loc.

Motivazione per lo studio di estremi vincolati

$D := \{ (x,y) \mid x^2 y = 16 \}$

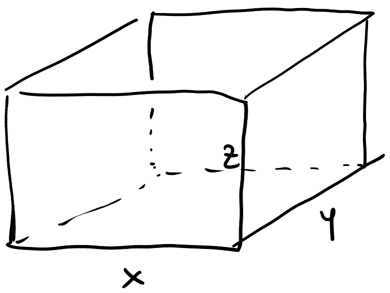
? minima distanza tra $(0,0)$ e D



? $$\min_{(x,y)\in D} \|(x,y)\| = \min_{(x,y)\in D} \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_{(x,y)\in D} (x^2+y^2)$$



$V(x,y,z) = xyz$

$\Gamma = \{ (x,y,z) \mid xy + 2xz + 2xz = 12 \}$

? $$\max_{(x,y,z)\in \Gamma} V(x,y,z)$$