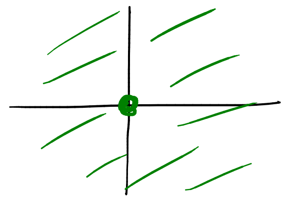
11 aprile 2025

Es.

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$



Già visto: $f$ differenziabile in $(0,0)$

utilizzando la definizione

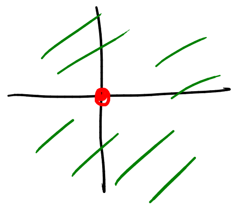
In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, aperto: $f$ è una funzione razionale, e come tale è differenziabile. $\square$

Tanto per gradire: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot y^3$ "congelato"

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 \, \frac{2x\,(x^2+y^2) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y^3 \, \frac{2x\,(x^2+y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}$$

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$



Già visto (con la definizione): $f$ non è differer. in $(0,0)$

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, aperto: $f$ è razionale

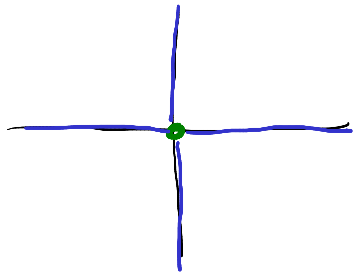
$\Rightarrow$ è differenziabile

- $f(x,y) = |xy|$

Già visto (con la def.): $f$ è differ. in $(0,0)$

$A := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0 \}$

aperto



$f|_A$ : composizione di:

$(x,y) \mapsto xy$ (polinomiale)

e $t \in \mathbb{R}^* \mapsto |t|$ derivabile

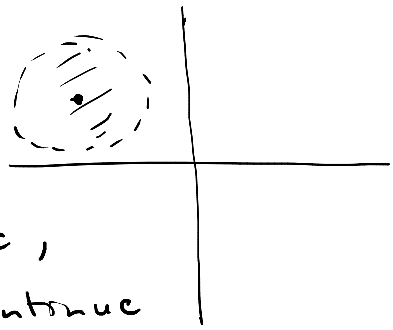
$\Rightarrow \forall (x,y) \in A$ si applicano le regole di derivazione (dell'analisi I):

$|xy| = |x| \underbrace{|y|}_{}$

"congelato"

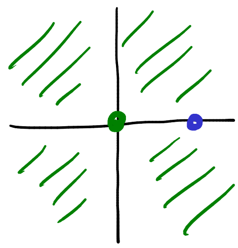
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sgn}(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sgn}(y)$$



Ristrette a ciascun quadrante, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono funzioni continue

$\Rightarrow f$ è differenziabile in ciascun quadrante, quindi in $A$



$f(x,y) = |xy|$

Verifico sugli assi (tranne che in $(0,0)$)

Considero $(a,0)$ con $a \neq 0$

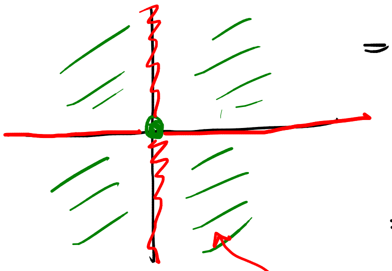
Con la definizione:

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ? $\quad \forall t \neq 0$: $\quad \dfrac{f(a+t,0) - f(a,0)}{t} = \dfrac{0-0}{t} = 0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,0) - f(a,0)}{t} = 0 =: \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ? $\quad \forall t \neq 0$: $\quad \dfrac{f(a,t) - f(a,0)}{t} = \dfrac{|at| - 0}{t} = \underbrace{|a|}_{\neq 0} \dfrac{|t|}{t}$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{t\to 0} \frac{f(a,t)-f(a,0)}{t}$$



$\Rightarrow$ f non è deriv. parzialm. rispetto a y in $(a,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(a,0)$.

Analogamente: f non è differ. in $(0,a)$ con $a \neq 0$.

## Es

$$f(x,y) = y^4 + 3x^3 y - y^2 \cos(x) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$(0,1) \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

È lecito calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ usando la formula del gradiente?

Equivale a: f è differenziabile in $(0,1)$?

Oss: con le regole di derivazione (di AM I):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 + 9x^2 y + y^2 \sin(x) \qquad \text{continua in } \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 3x^3 - 2y\cos(x) \qquad \text{"}$$

$$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \overset{\text{coroll.}}{\Rightarrow} f \text{ differenziabile in } \mathbb{R}^2$$

$(\Rightarrow$ in $(0,1))$

Dunque: è lecito applicare la formula del gradiente e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot v$$

$$= (0, 4-2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Es. (sul piano tangente)

$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \qquad (1,1)$

polinom. $\Rightarrow$ differ. ovunque $\qquad \nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$

Eq. del piano tangente in $(1,1)$:

$$z = f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot ((x,y) - (1,1))$$

$$= 2 + (-2,-2) \cdot (x-1, y-1)$$

$$= 2 - 2(x-1) - 2(y-1)$$

$$= 2 - 2x + 2 - 2y + 2$$

$$\Rightarrow \quad z = -2x - 2y + 6$$

$$(\Leftrightarrow \quad 2x + 2y + z - 6 = 0)$$

• $f(x,y,z) = e^{x+y} z^2 + 1 \qquad (1,-1,1)$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= e^{x+y} \cdot 1 \cdot z^2 + 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= e^{x+y} \cdot 1 \cdot z^2 + 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= e^{x+y}\, 2z + 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{continue} \Rightarrow f \text{ differ. in } \mathbb{R}^3$$

Eq. del piano tangente:

$$w = f(1,-1,1) + \nabla f(1,-1,1) \cdot ((x,y,z) - (1,-1,1))$$

$$= 2 + (1,1,2) \cdot (x-1, y+1, z-1)$$

$$= 2 + x - 1 + y + 1 + 2(z-1)$$

$w = x + y + 2z$ $\square$

Es. (sulla matrice jacobiana)

- $f(x,y) = (\underbrace{xy^2}_{=: f_1(x,y)}, \underbrace{e^{3x-y^2}}_{=: f_2(x,y)}, \underbrace{x^2+y^4}_{=: f_3(x,y)})$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Scrittura equivalente:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ e^{3x-y^2} \\ x^2+y^4 \end{pmatrix} \qquad f_1, f_2, f_3 \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ e^{3x-y^2} \cdot 3 & e^{3x-y^2}(-2y) \\ 2x+0 & 0+4y^3 \end{pmatrix} = \dots$$

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \overbrace{xy^2+z^2}^{=: f_1(x,y,z)} \\ \underbrace{5x^2+e^{xyz}}_{=: f_2(x,y,z)} \end{pmatrix}$

$f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 2z \\ 10x + e^{xyz}\, yz & e^{xyz}\, xz & e^{xyz}\, xy \end{pmatrix}$$