8 aprile 2025

Es

- $f(x_1,x_2) = |x_1-1|(x_1+x_2) \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; $\quad \bar{x} = (1,3)$

$v = \left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$

$g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c. $g(t) := f(\bar{x}+tv)$

$$g(t) = f\left((1,3)+t\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = f\left(1+t\cdot\frac{2}{\sqrt5},\ 3+t\cdot\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$$= \left|1+t\cdot\frac{2}{\sqrt5}-1\right|\left(1+t\cdot\frac{2}{\sqrt5}+3+t\cdot\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\sqrt5}}_{\text{costante}}|t|\underbrace{\left(4+\frac{3}{\sqrt5}t\right)}_{\text{derivabile } (\neq 0 \text{ vicino a } t=0)}$$

? g è derivabile in $t=0$? No!

Se g fosse derivabile in $t=0$, lo sarebbe (regola del rapporto) anche la funzione

$$t \mapsto \frac{g(t)}{\frac{2}{\sqrt5}\left(4+\frac{3}{\sqrt5}t\right)} = |t|$$

Dunque: g non deriv. in $t=0$

$\Rightarrow$ f non deriv. in $\bar{x}$ nella direzione v.

$v = (0,1)$

$g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c $g(t) = f((1,3)+t(0,1))$

$$= f(1, 3+t) = |1-1|(1+3+t)$$

$$= 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ g è deriv. in $t=0$ con $g'(0)=0$

$\Rightarrow$ f è deriv. in $(1,3)$ nella direzione $v=(0,1)$

con $\frac{\partial f}{\partial v}(1,3) = 0.$ $\square$

Riscrivo quanto appena stabilito:

f è derivabile parzialmente in $(1,3)$ rispetto alla variabile x_2 e $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,3) = 0.$

Es

- $f(x,y) = 8xy + 5x^4y^2 - y^3$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2$

? f è derivabile rispetto a x in un generico punto di $\mathbb{R}^2$?

Fisso $y \in \mathbb{R}$ e considero

$$g(x) = 8x\underbrace{y}_{\text{costante}} + 5x^4\underbrace{y^2}_{\text{cost.}} - \underbrace{y^3}_{\text{cost.}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Oss: g è funzione polinomiale

$\Rightarrow$ derivabile ovunque

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

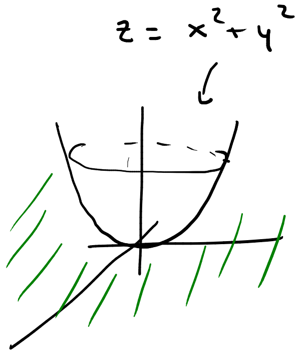
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \overset{\text{def}}{=} g'(x) = 8y \cdot 1 + 5y^2 \cdot 4x^3 + 0$$

$$= 8y + 20x^3y^2$$

Analogamente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = 8xy + 5x^4y^2 - y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8x \cdot 1 + 5x^4 \cdot 2y - 3y^2$$
$$= 8x + 10x^4 y - 3y^2$$

- $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2-z)$



$$\text{dom}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z > 0\}$$

$\uparrow$ aperto $\qquad\qquad\qquad\qquad z < x^2+y^2$

$\Rightarrow$ tutti i suoi punti sono interni

Fisso $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}$; $\forall x$ t.c. $(x, \bar{y}, \bar{z}) \in \text{dom}(f)$

$$g(x) := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivabile}}}{\ln}(\underbrace{x^2}_{\text{polin.}} + \underbrace{\bar{y}^2 - \bar{z}}_{\text{cost.}})$$

Oss: g composta di funzioni derivabili

$$\Rightarrow \exists\, g'(x) = \frac{1}{x^2+\bar{y}^2-\bar{z}} \cdot 2x$$

Elimino "$-$" e scrivo:

$\forall (x,y,z) \in \text{dom}(f)$ $\qquad \exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2x}{x^2+y^2-z}$

Analogamente:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{x^2+y^2-z}$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{(-1)}{x^2+y^2-z}$$

• $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad (= \| (x,y) \|)$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2$

Fisso $y \in \mathbb{R}$; $\quad x \mapsto x^2+y^2$ polin. $\Rightarrow$ deriv.

$t \mapsto \sqrt{t}$ deriv. $\Leftrightarrow t > 0$

Se $x^2+y^2 > 0$ (cioè: $(x,y) \neq (0,0)$),
la funzione $g(x) = \sqrt{x^2+y^2}$ è composta di
funzioni derivabili, quindi è derivabile
con

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x$$

Quindi: per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
f è derivabile parzialmente rispetto a x
con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Per simmetria tra x e y: f è anche deriv.
parzialmente rispetto a y con

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

In $(0,0)$ non posso invocare le regole di
derivazione (perché $\sqrt{\cdot}$ non è derivabile);
verifico se f è deriv. parzialmente utilizzando
la definizione.

$v = e_1 = (1,0)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+0^2}-0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$ non esiste!

$\Rightarrow$ f non è derivabile parzialmente in $(0,0)$ rispetto alla variabile x

Stessa cosa per la derivabilità rispetto alla variabile y.

Es. Scrivo il gradiente di

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2-z)$$

in $(1,1,-1)$.

$$\nabla f(1,1,-1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,-1), \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,-1)\right)$$

vedi sopra

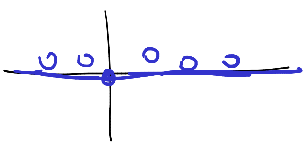
$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$ $\square$

Es. (di funzione derivabile in ogni direzione ma non continua)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$v = (1,0)$

$$g(t) := f((0,0)+t(1,0)) = f(t,0) = \begin{cases} \dfrac{t^2 \cdot 0}{t^4+0^2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$



$$= 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow \quad \exists\, g'(0) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

Analogamente, per $v = (0,1)$:

$$\exists\, \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \quad \left(= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right)$$

Prendo $v = (v_1, v_2)$ con $v_1, v_2 \neq 0$

$\forall t \neq 0$:

$$\frac{f((0,0) + t(v_1,v_2)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(\overset{\neq 0}{\overbrace{tv_1}}, \overset{\neq 0}{\overbrace{tv_2}}) - f(0,0)}{t}$$

$$= \frac{\frac{(tv_1)^2 (tv_2)}{(tv_1)^4 + (tv_2)^2} - 0}{t}$$

$$= \frac{t^{\cancel{3}\,2} v_1^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} = \frac{v_1^2 v_2}{\underbrace{t^2 v_1^4}_{\to 0} + v_2^2} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{v_1^2 v_2}{v_2^2}$$

$\to v_2^2 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{v_1^2}{v_2} \quad (\in \mathbb{R})$$

Es.

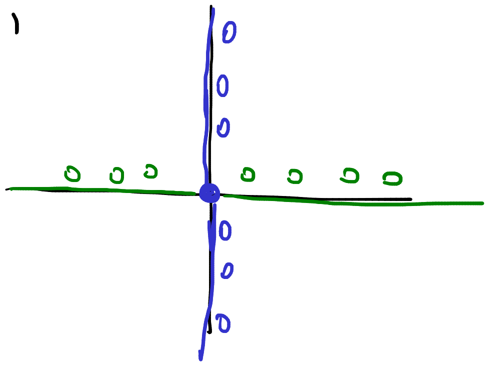
- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

  f non è derivabile parzialmente in $(0,0)$

  $\Rightarrow$ non è diff. in $(0,0)$ $\square$

- $f(x,y) = |xy|$ $\qquad (0,0)$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$



$f|_{\text{asse } x} \equiv 0 \implies \exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$f|_{\text{asse } y} \equiv 0 \implies \exists \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Quindi: f è der. parz. in $(0,0)$

con $\nabla f(0,0) = (0,0)$

Considero il rapporto incrementale

scrivo (h,k) invece di (h_1,h_2)

$\forall (h,k) \neq (0,0)$:

$$R(h,k) = \frac{f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \frac{f(h,k) - 0 - \overbrace{(0,0)\cdot(h,k)}^{=0\cdot h + 0\cdot k = 0}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\forall (h,k) \neq (0,0)$

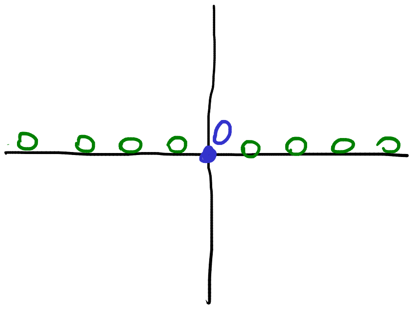
$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \le R(h,k) = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = |h| \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\le 1} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|h|}$$

$(h,k) \to (0,0)$

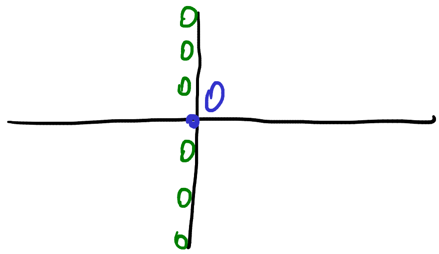
$\overset{\text{TCO}}{\implies} R(h,k) \to 0$ per $(h,k) \to (0,0)$

$\implies f$ è differenziabile in $(0,0)$ $\square$

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad (0,0)$?



$\Rightarrow \quad \exists \; \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$



$\Rightarrow \quad \exists \; \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Rapporto incrementale : $\forall (h,k) \neq (0,0)$

$$R(h,k) = \frac{f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) - \nabla f(\overset{(0,0)}{0,0}) \cdot (h,k)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \frac{f(h,k) - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^2k^3}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\forall (h,k) \neq (0,0)$:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq |R(h,k)| = \frac{|h^2k^3|}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\underbrace{\frac{h^2}{h^2+k^2}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \cdot \underset{\to 0}{k^2}}_{\to 0}$$

$(h,k) \to (0,0)$

$\overset{TCO}{\Rightarrow} \quad \exists \lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h,k) = 0$

$\Rightarrow$ f è differenziabile in $(0,0)$ $\square$

- $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

.... $\exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \exists \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Scrivo il rapporto incrementale.

$\forall (h,k) \neq (0,0)$:

$$(0,0)\cdot(h,k) = 0$$

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \overbrace{\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}^{=}}{\|(h,k)\|}$$

$$= \frac{\dfrac{h^4k^2}{(h^4+k^2)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\frac{h^4}{h^4+k^2}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{k^2}{h^4+k^2}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

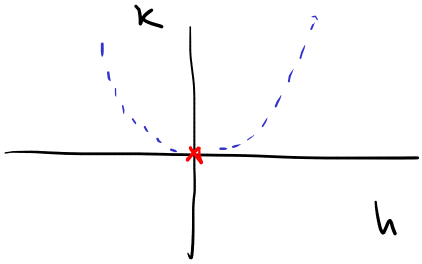
$$\leq \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} +\infty$$

???!!!

Riparto da

$$R(h,k) = \frac{h^4 k^2}{(h^4+k^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \left(\frac{h^2k}{h^4+k^2}\right)^2$$



Oss: $$R(h,h^2) = \frac{h^4\, h^4}{(h^4+h^4)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+h^4}}$$

$$= \frac{h^8}{4h^8} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+h^4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+h^4}} \xrightarrow[h\to 0]{} +\infty$$

Quindi: ho trovato una restrizione di $R(h,k)$ che non tende a 0 per $(h,k) \to (0,0)$

$\Rightarrow$ non è vero che $\lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h,k) = 0$

Conclusione: f non è differenziabile in $(0,0)$. $\square$

Es:

$c \in \mathbb{R}$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Fisso $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0$

$\Rightarrow f$ è der. parz. in $\bar{x}$ e $\nabla f(\bar{x}) = (0, \dots, 0)$

Considero il rapporto incrementale.

$\forall h \neq 0$:

$$R(h) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - \overbrace{\nabla f(\bar{x})}^{\substack{(0,\dots,0) \\ =}} \cdot h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}$$

$$= \frac{c - c - 0}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0} R(h) = 0 \Rightarrow f$ è diff. in $\bar{x}$

$$df_{\bar{x}} := h \in \mathbb{R}^n \longmapsto \underbrace{\nabla f(\bar{x})}_{\substack{\shortparallel \\ (0,\dots,0)}} \cdot h = 0$$

$\Rightarrow df_{\bar{x}} \equiv 0$.

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>lineare</u>

$f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f(\lambda x) = \lambda f(x)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Fisso $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Verifico se f è deriv. parzialmente in $\bar{x}$.

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall t \neq 0$:

$$\frac{f(\bar{x} + te_i) - f(\bar{x})}{t} = \frac{\cancel{f(\bar{x})} + f(te_i) - \cancel{f(\bar{x})}}{t}$$

$$= \frac{t\, f(e_i)}{t} = f(e_i)$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + te_i) - f(\bar{x})}{t} = f(e_i) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$$

Quindi: f è deriv. part. in $\bar{x}$ con

$$\nabla f(\bar{x}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Per ogni $h \in \mathbb{R}^n$: $\quad h = (h_1, \dots, h_n)$

$$\nabla f(\bar{x}) \cdot h = f(e_1) h_1 + \dots + f(e_n) h_n$$
$$= f(h_1 e_1) + \dots + f(h_n e_n)$$
$$= f(h_1 e_1 + \dots + h_n e_n) = f(h)$$

Per $h \neq 0$:

$$R(h) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}$$

$$= \frac{\cancel{f(\bar{x})} + \cancel{f(h)} - \cancel{f(\bar{x})} - \cancel{f(h)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{h\to 0} R(h) = 0$$

Conclusione: f è differ. in $\bar{x}$ e

$\forall h: \quad df_{\bar{x}}(h) = f(h)$, cioè: $df_{\bar{x}} = f$.

- $f(x,y) = x^2+y^2 \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Fisso $(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2$.

- f è deriv. parz. in $(\bar{x},\bar{y})$ con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 2\bar{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 2\bar{y}$$

- Per $(h,k)\neq(0,0)$:

$$R(h,k) = \frac{f((\bar{x},\bar{y})+(h,k)) - f(\bar{x},\bar{y}) - \nabla f(\bar{x},\bar{y})\cdot(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y}) - (2\bar{x},2\bar{y})\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{(\bar{x}+h)^2+(\bar{y}+k)^2-(\bar{x}^2+\bar{y}^2)-(2\bar{x}h+2\bar{y}k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{\cancel{\bar{x}^2}+\cancel{2\bar{x}h}+h^2+\cancel{\bar{y}^2}+\cancel{2\bar{y}k}+k^2-\cancel{\bar{x}^2}-\cancel{\bar{y}^2}-\cancel{2\bar{x}h}-\cancel{2\bar{y}k}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

Quindi: f è differ. in $(\bar{x},\bar{y})$ con

$$df_{(\bar{x},\bar{y})} := (h,k)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto 2\bar{x}h+2\bar{y}k\in\mathbb{R}. \qquad \square$$