3 aprile 2025

Es.

$x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq y$

$r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad r(t) = x + t(y-x)$

È una curva semplice?

Oss: $x \neq y \Rightarrow \exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ t.c. $x_i \neq y_i$

$\Rightarrow r_i(t) = x_i + t\underbrace{(y_i - x_i)}_{\neq 0}$ $\qquad r_i$ strett. monotona $\Rightarrow$ ingettiva

$\Rightarrow r$ è una funzione ingettiva $\square$

Oss: se una componente di una funzione vettoriale è ingettiva, allora lo è anche la funzione vettoriale.

Nota: l'ingettività di una componente è sufficiente a garantire l'ingettività della funzione vettoriale, ma non necessaria.

Es: $r(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$

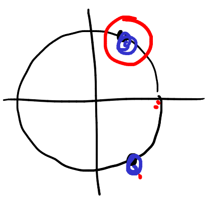
Oss: né cos né sin sono ingettive in $(0, 2\pi)$, ma r lo è

$t_1, t_2 \in [0, 2\pi], \quad t_1 \neq t_2 \quad (t_1 < t_2)$

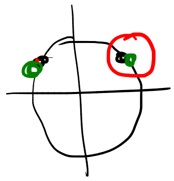
$$r(t_1) = r(t_2) \iff \begin{cases} \cos(t_1) = \cos(t_2) \\ \sin(t_1) = \sin(t_2) \end{cases}$$

$\begin{cases} \cos(t_1) = \cos(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2 \quad \vee \end{cases}$

!!



$\sin(t_1)=\sin(t_2) \Rightarrow t_1=t_2$ ✓

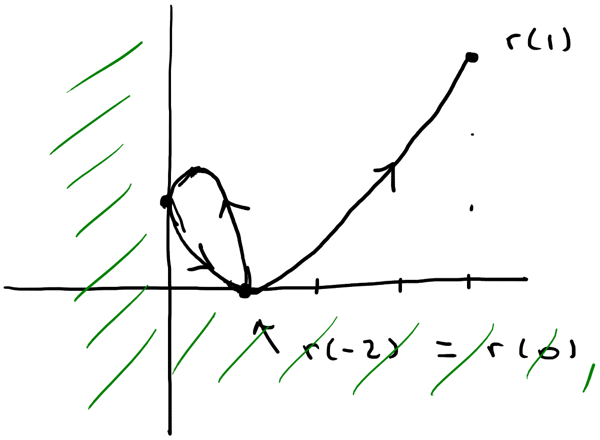


Es: $r(t) = \Big(\underbrace{\overbrace{(t+1)^2}^{\geq 0}}_{=:x(t)} , \underbrace{t^2 \overbrace{(t+2)}^{\geq 0}}_{=:y(t)} \Big), \quad t \in [-2,1]$

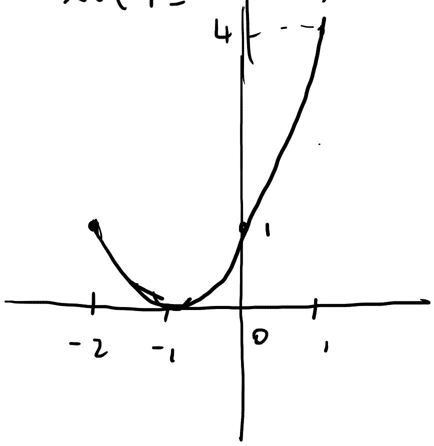
$r(-2) = (1,0)$
$\neq$ curva non chiusa
$r(1) = (4,3)$

$r(0) = (1,0) = r(-2) \Rightarrow$ curva non semplice

↑ interno

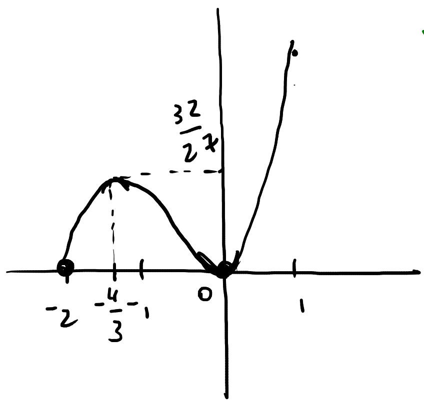


$x(t) = (t+1)^2$



$y(t) = t^2(t+2) = t^3+2t^2$

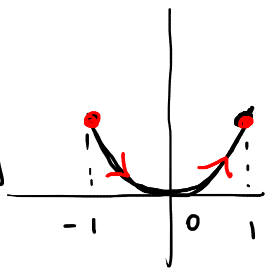
$y'(t) = 3t^2+4t$
$= 0$
$t = 0$
$t = -\frac{4}{3}$



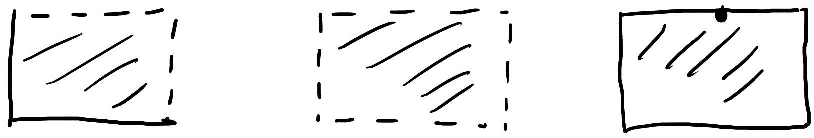
$y(-\frac{4}{3}) = \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3}$
$= \frac{32}{27}$

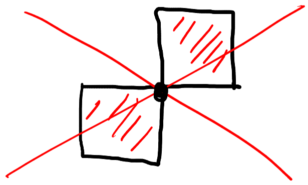
Es: $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = x^2$

Parametrizzazione della curva grafico: $r(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1,1]$



Es. di "insiemi di parametri"

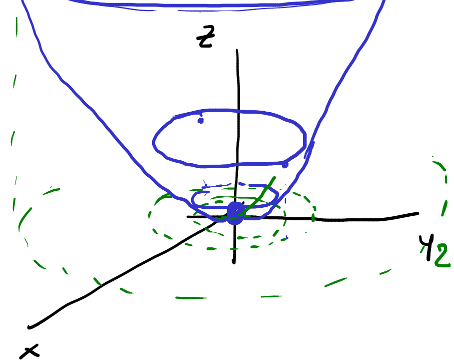




Es: $f : \bar{B}_2(0,0) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$

$\sigma : \bar{B}_2(0,0) \to \mathbb{R}^3$

$\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v)) = (u, v, u^2 + v^2)$



$(x,y,z) \in \Sigma$

$z = \underbrace{x^2 + y^2}$