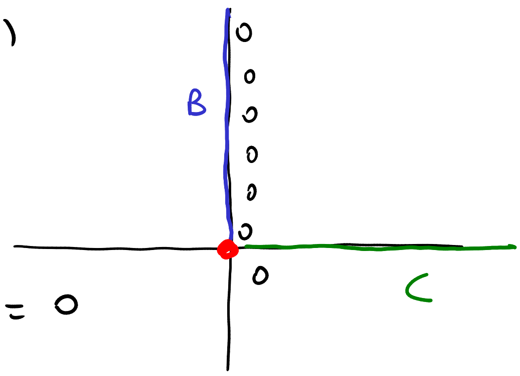
28 marzo 2025

Esempi (calcolo di limiti)

- $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ $\qquad A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Già visto nella lezione scorsa: i limiti significativi sono $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)$

$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0,\ y>0\}$ $(\subseteq A)$



$\forall (x,y) \in B:\quad f(x,y) = f(0,y) = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|B}(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \\ \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f_{|B}(x,y) = \lim_{y\to+\infty} f(0,y) = 0 \end{array}$$

Quindi: $\underline{\underline{\text{se}}}$ esistono, i limiti di f per $(x,y)\to(0,0)$ e $\|(x,y)\|\to+\infty$ sono uguali a 0.

$C := \{(x,y) \mid y=0,\ x>0\}$

$\forall (x,y) \in C:\quad f(x,y) = f(x,0) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+0^2}\right)$

$= \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|C}(x,y) = \lim_{x\to 0^+} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\Big(\overset{\to+\infty}{\underset{\to 0^+}{\frac{1}{x}}}\Big) = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f|_C(x,y) = \lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\Big(\overbrace{\frac{1}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}}^{\to 0}\Big) = 0$$

Non posso escludere che $\exists \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = 0$

Congetturo che il limite sia 0; lo devo verificare.

Osservo che per ogni $(x,y) \neq (0,0)$:

$$0 \le \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=\|(x,y)\|}}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \le \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right| \le \overbrace{\frac{1}{\underbrace{\|(x,y)\|}_{\to+\infty}}}^{\to 0}$$

$$\Rightarrow \quad \|(x,y)\| \to +\infty \ : \quad \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right| \to 0$$

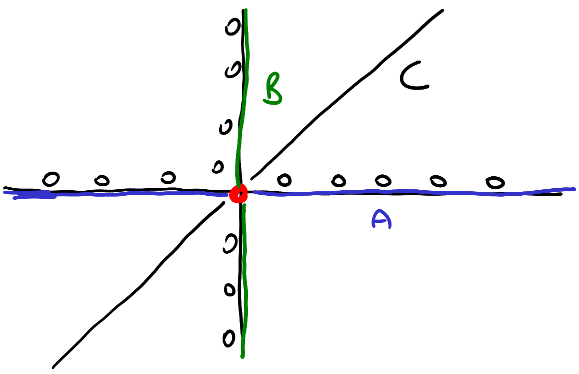
$$\Rightarrow \quad \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \arctan\Big(\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{\to 0}\Big) = \lim_{t\to 0} \arctan(t) = 0$$

$\square$

- $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

f razionale

$\Rightarrow$ lim. significativi sono per $(x,y) \to (0,0)$ e $\|(x,y)\| \to +\infty$



$A = \{(x,y) \mid y = 0,\ x \neq 0\}$ $f|_A(x,y) = f(x,0) = 0 \quad \forall (x,y) \in A$

($\Rightarrow$ se esistono, i due limiti sono uguali a 0)

$B = \{(x,y) \mid x=0,\ y\neq 0\}$ $\quad f_{|_B}(x,y) = f(0,y) = 0 \quad \forall (x,y)\in B$

$C = \{(x,y) \mid x=y,\ x\neq 0\}$

$\forall (x,y)\in C : \quad f_{|_C}(x,y) = f(x,x) = \dfrac{x\,x}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$

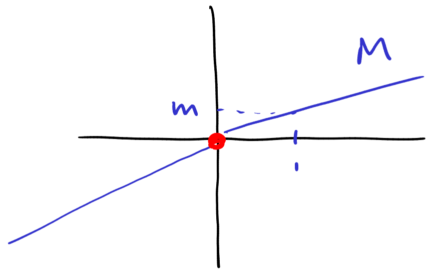
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|_C}(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f_{|_C}(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Quindi: nessuno dei due limiti significativi esiste!

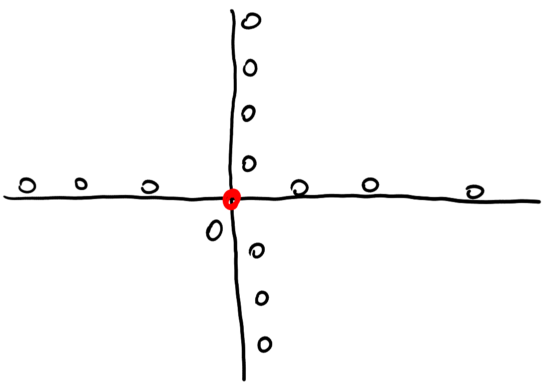
Oss: $M = \{(x,y) \mid y = mx,\ x\neq 0\}$ $\quad (m\in\mathbb{R})$

$$f_{|_M}(x,y) = f(x,mx) = \frac{x\cdot mx}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$



Quindi: f è costante su ciascuna retta passante per l'origine (privata di $(0,0)$).

- $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{4x^2+y^2}$



$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

f razionale $\Rightarrow$ continua

lim. sign. $(0,0)$, "∞"

La restrizione di f agli assi coordinati è identicamente nulla $\Rightarrow$

se esistono, i due limiti sono uguali a 0.

$$A := \{(x,y) \mid x = y,\ x \neq 0\}$$

$$f_{|A}(x,y) = f(x,x) = \frac{x^3 x^2}{4x^2 + x^2} = \frac{x^3}{5}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|A}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{5} = 0$$

coerente con i limiti delle altre restrizioni

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \left|f_{|A}(x,y)\right| = \lim_{|x|\to+\infty} \left|\frac{x^3}{5}\right| = +\infty$$

$$\Rightarrow f_{|A}(x,y) \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\not\to} 0$$

$$\Rightarrow \text{non esiste} \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)$$

Osservo che $\forall (x,y) \in \mathrm{dom}(f)$:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left|\frac{x^3 y^2}{4x^2+y^2}\right| = |x|^3 \underbrace{\frac{y^2}{4x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x|^3$$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{|x|^3}_{\to 0 \text{ se } (x,y)\to(0,0)}$$

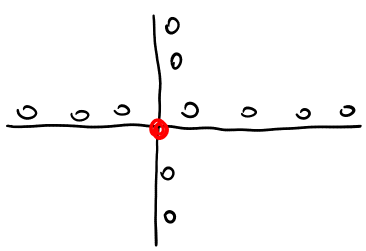
$$\Rightarrow f(x,y) \to 0 \quad \text{per } (x,y)\to(0,0). \qquad \square$$

- $$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

f razionale $\Rightarrow$ continua

l.s. : $(0,0)$, "∞"



Come prima: se esistono, i due limiti sono uguali a 0.

Provo con $A = \{(x,y) \mid x=y,\ x\neq 0\}$

$$f_{|A}(x,y) = \frac{x^2\, x}{x^4+x^2} = \frac{x^3}{x^4+x^2} \begin{cases} \xrightarrow{x\to 0} 0 \\ \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0 \end{cases}$$

Oss: fissato $m\in\mathbb{R}^*$

$$f(x,mx) = \frac{x^2\,(mx)}{x^4+m^2x^2} = \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} \begin{cases} \sim \dfrac{mx^3}{m^2x^2} & x\to 0 \\ \sim \dfrac{mx^3}{x^4} & x\to\pm\infty \end{cases} \to 0$$

Fisso $a\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x,ax^2) = \frac{x^2\cdot ax^2}{x^4+a^2x^4} \overset{x\neq 0}{=} \frac{a}{1+a^2}$$

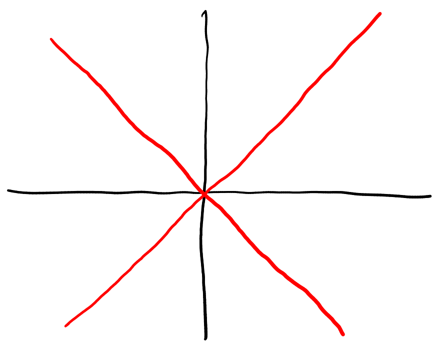
restringo f a una parabola con vertice in $(0,0)$

Cioè: la restrizione di f alla parabola $y=ax^2$ è costante di valore $\frac{a}{1+a^2}$ e quindi non tende a 0 né per $x\to 0$, né per $x\to\pm\infty$.

Conclusione: non esiste nessuno dei due limiti

- $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2-y^2}$

$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2\neq 0\}$



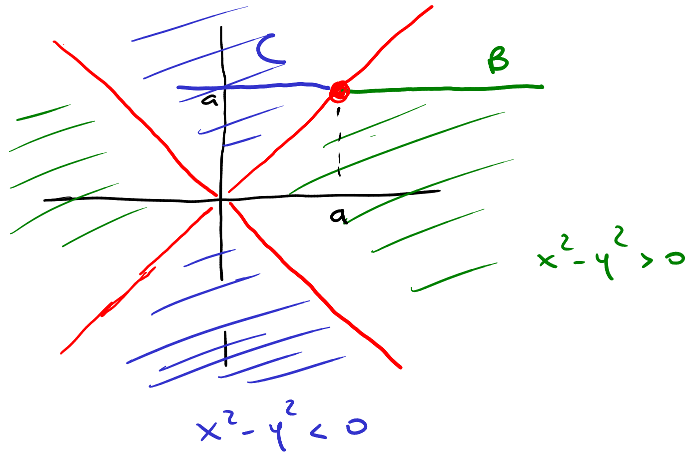
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \pm x\}$

f razionale $\Rightarrow$ continua

$\Rightarrow$ i limiti significativi sono

- $(x,y) \to (a,a) \qquad a \neq 0$
- $(x,y) \to (a,-a) \qquad a \neq 0$
- $(x,y) \to (0,0)$
- $\|(x,y)\| \to +\infty$

Considero (a,a), $\underline{a > 0}$



$x^2-y^2>0 \iff y^2 < x^2$

$\iff |y| < |x|$

$\iff -|x| < y < |x|$

$B = \{(x,y) \mid y = a,\ x > a\}$

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f|_B(x,y) = \lim_{x\to a^+} f(x,a) = \lim_{x\to a^+} \frac{\overbrace{x^2 a}^{\to a^3 > 0}}{\underbrace{x^2 - a^2}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$C = \{(x,y) \mid y = a,\ x < a\}$

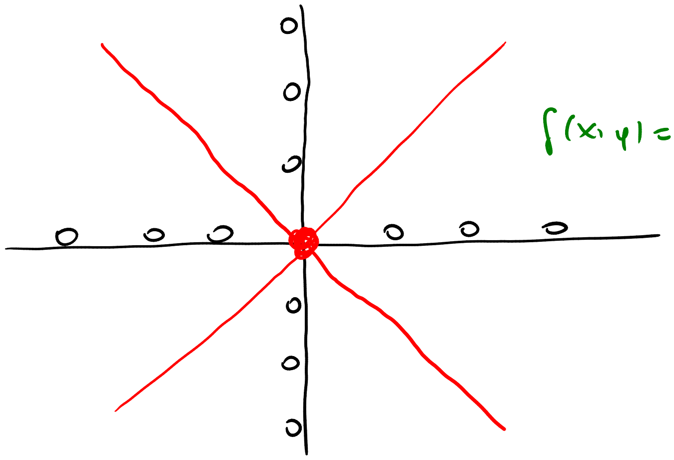
$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f|_C(x,y) = \lim_{x\to a^-} f(x,a) = \lim_{x\to a^-} \frac{\overbrace{x^2 a}^{\to a^3 > 0}}{\underbrace{x^2 - a^2}_{\to 0^-}} = -\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$$

Conclusione analoga ottengo in (a,a) con $a<0$, e anche in $(a,-a)$ con $a \neq 0$

Considero $(0,0)$

f ristretta agli assi è identicamente nulla



$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}$$

$\Rightarrow$ se esiste,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ deve essere uguale a 0

(idem per il limite all' ∞)

Provo con la restrizione alla retta di equazione $y = 2x$:

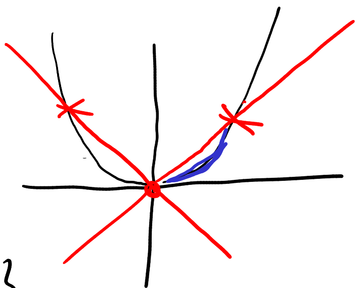
$$f(x, 2x) = \frac{x^2\, 2x}{x^2 - 4x^2} = \frac{2x^3}{-3x^2} = -\frac{2}{3}x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,2x) = \lim_{x\to 0} -\frac{2}{3}x = 0$$ non mi dice niente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,2x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{3}x = -\infty \neq 0$$

$\Rightarrow$ non esiste il limite per $\|(x,y)\| \to +\infty$.

Provo con $y = x^2$

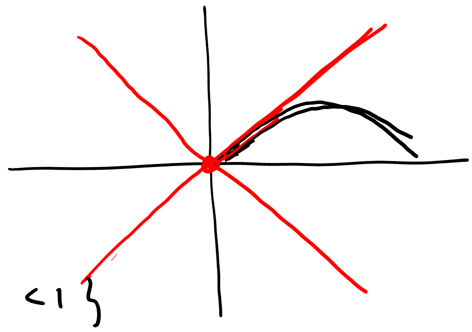


Scrivo meglio:

$D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ y = x^2\}$

$$f_{|_D}(x,y) = f(x,x^2) = \frac{x^2 x^2}{x^2 - x^4} = \frac{x^4}{x^2 - x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$??

$$y = x(1-x)$$
$$= x - x^2$$



$$E = \{(x,y) \mid y = x(1-x),\ 0 < x < 1\}$$

$$f|_E(x,y) = \frac{x^2 x(1-x)}{x^2 - x^2(1-x)^2} = \frac{x^3(1-x)}{x^2(1-(1-x)^2)}$$

$$= \frac{x(1-x)}{1-(1+x^2-2x)} = \frac{x(1-x)}{2x - x^2} \sim \frac{x}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0$$

Quindi: $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$