27 marzo 2025

obiettivo: determinare $((x_k, y_k))$ t.c.

$$\|(x_k, y_k)\| \to +\infty \quad \text{ma} \quad |x_k| \not\to +\infty$$
$$|y_k| \not\to +\infty$$

Dal "pubblico":

$$x_k = e^{k(-1)^k} = \begin{cases} e^k & k \text{ pari} \\ e^{-k} & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad |x_k| \not\to +\infty$$

$$y_k = e^{k(-1)^{k+1}} = \begin{cases} e^{-k} & k \text{ pari} \\ e^k & k \text{ disp.} \end{cases} \qquad |y_k| \not\to +\infty$$

$$\|(x_k, y_k)\| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} = \begin{cases} \sqrt{e^{2k} + e^{-2k}} & k \text{ pari} \\ \sqrt{e^{-2k} + e^{2k}} & k \text{ disp.} \end{cases} \geq \sqrt{e^{2k}} = e^k \to +\infty$$

Altro esempio:

$$x_k = \begin{cases} k & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ disp.} \end{cases}$$

$$\|(x_k, y_k)\| = \sqrt{k^2 + 0^2} = k \to +\infty$$

$$y_k = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ k & k \text{ disp.} \end{cases}$$

Es.

Verifico che $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \underbrace{\left(\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}\right)}_{=: f(x,y)} = 0$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ illimitato

Fisso (x_k, y_k) t.c. $\|(x_k, y_k)\| \to +\infty$

(cioè $x_k^2 + y_k^2 \to +\infty$)

Valuto $f(x_k, y_k) = \dfrac{x_k^2 + y_k^2}{x_k^4 + y_k^4}$

Oss: per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^4 + y^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2$$

$$= (x^2+y^2)^2 - \underbrace{2x^2y^2}_{\leq\, x^4+y^4}$$

$$\geq (x^2+y^2)^2 - (x^4+y^4)$$

$$\Rightarrow \quad x^4+y^4 \geq (x^2+y^2)^2 - (x^4+y^4)$$

$$\Rightarrow \quad 2(x^4+y^4) \geq (x^2+y^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^4+y^4 \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^4+y^4} \leq \frac{2}{(x^2+y^2)^2}$$

Quindi, $\forall k$:

$$0 \leq f(x_k,y_k) = \frac{x_k^2+y_k^2}{x_k^4+y_k^4} \leq \cancel{(x_k^2+y_k^2)} \frac{2}{(x_k^2+y_k^2)^{\cancel{2}}}$$

0

$$= \frac{2}{(x_k^2+y_k^2)} \to +\infty \quad \to 0$$

TCO

$$\Rightarrow \quad f(x_k,y_k) \to 0 \qquad \square$$

Es.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^4} = +\infty$

$f(x,y)$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(0,0) \in \mathrm{Fr}(\mathrm{dom}(f))$

Fisso $((x_k,y_k)) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ t.c. $(x_k,y_k) \to (0,0)$

(cioè: $x_k \to 0$, $y_k \to 0$)

Valuto

$$f(x_k,y_k) = \frac{1}{\underbrace{\underbrace{x_k^2}_{\to 0} + \underbrace{y_k^4}_{\to 0}}_{\substack{\to 0 \\ > 0}}} \to +\infty \qquad \square$$

- $$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \underbrace{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}}_{=: f(x,y)}$$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ illimitato

Fingo di non accorgermi che questa funzione è il reciproco di una già considerata

Fisso $((x_k,y_k)) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ t.c. $\|(x_k,y_k)\| \to +\infty$

(cioè: $x_k^2 + y_k^2 \to +\infty$)

e valuto

$$f(x_k,y_k) = \frac{x_k^4 + y_k^4}{x_k^2 + y_k^2} \underset{\text{disug. dimostrata prima}}{\geq} \frac{(x_k^2+y_k^2)^2}{2} \cdot \frac{1}{x_k^2+y_k^2}$$

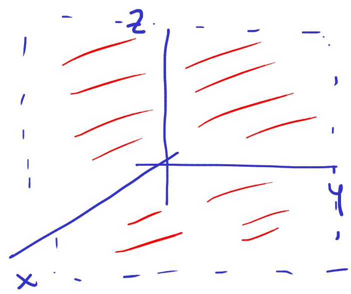
$$= \underbrace{\frac{\overbrace{x_k^2 + y_k^2}^{\to +\infty}}{2}}_{\to +\infty}$$

TDO $\Rightarrow$ $f(x_k,y_k) \to +\infty$ $\square$

- $$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \underbrace{\left\| \left(\frac{1}{x^2}, 3 + yz^3, x^2 y \right) \right\|}_{=: f(x,y,z)} = +\infty$$

$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$

$(0,0,0) \in \mathrm{Fr}(\mathrm{dom}(f))$



Fisso $((x_k,y_k,z_k)) \subset \mathrm{dom}(f)$

t.c. $(x_k, y_k, z_k) \to (0,0,0)$ (cioè: $x_k \to 0$, $y_k \to 0$, $z_k \to 0$)

e valuto:

$$\| f(x_k, y_k, z_k) \| = \left\| \left(\frac{1}{x_k^2}, \; 3 + y_k z_k^3, \; x_k^2 y_k \right) \right\|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{x_k^2}\right)^2 + \left(3 + y_k z_k^3\right)^2 + \left(x_k^2 y_k\right)^2}$$

non è necessario calcolarlo

Mi basta osservare che $\frac{1}{x_k^2} \to +\infty$ ($x_k^2 \to 0$, >0)

Visto che la prima componente diverge (in valore assoluto), allora la succ delle norme diverge. $\square$

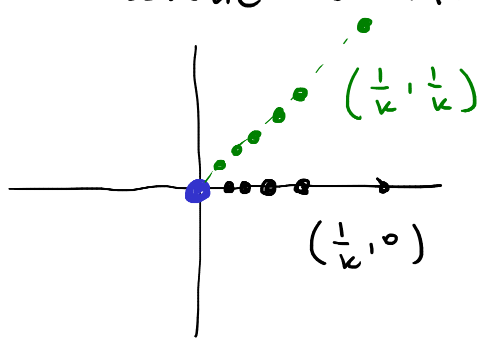
Es.

• Verifico che $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

non è continua in $(0,0)$.

$f(0,0) = 0$

Devo trovare almeno una successione $(x_k, y_k) \to (0,0)$ t.c. $f(x_k, y_k) \not\to 0$



Provo con

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$$

$\frac{1}{k} \to 0$, $0 \to 0$ ok

Valuto $f(x_k, y_k) = \dfrac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} = \dfrac{\frac{1}{k} \cdot 0}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 0^2} = 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow f(x_k, y_k) \to 0$ non mi dice niente!

Provo con $(x_k, y_k) = \left(\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}, \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}\right) \to (0,0)$ ✓

Valuto

$$\forall k: \quad f(x_k, y_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = \frac{1}{2} \neq 0 \quad (= f(0,0))$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$ $\square$

- Verifico che le proiezioni sugli assi sono funzioni continue.

Fisso $i \in \{1, \dots, n\}$ e considero $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \pi_i(x) = x_i$

Fisso $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$; fisso $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $x_k \to \bar{x}$

$\Updownarrow$ banalità del limite di succ. vettoriali:

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$: $x_{k,j} \to \bar{x}_j$

Valuto: $\pi_i(x_k) = x_{k,i}$

$\pi_i(\bar{x}) = \bar{x}_i$

Per la banalità ... :

$x_{k,i} \to \bar{x}_i$

cioè: $\pi_i(x_k) \to \pi_i(\bar{x})$ $\square$

Es. Verifico che

$$f(x,y,z) = (x+y,\ xz^2,\ y+z^3)$$

è continua.

Considero le componenti:

$$f_1(x,y,z) = x+y = \pi_x(x,y,z) + \pi_y(x,y,z)$$

$$\Rightarrow f_1 = \underbrace{\pi_x}_{\text{cont.}} \overset{\text{cont.}}{+} \underbrace{\pi_y}_{\text{cont.}}$$ f_1 è continua

$$f_2(x,y,z) = x z^2$$

$$f_2 = \pi_x (\pi_z)^2 = \underbrace{\pi_x}_{\text{cont.}} \cdot \underbrace{\pi_z}_{\text{cont.}} \cdot \underbrace{\pi_z}_{\text{cont.}}$$

f_2, f_3 cont.

$$f_3(x,y,z) = y + z^3 \qquad f_3 = \underbrace{\pi_y}_{\text{cont}} + \underbrace{(\pi_z)^3}_{\text{cont.}}$$

$\Rightarrow f$ è continua in $\mathbb{R}^3$. $\square$

$\bar{x} \in Dr(A)$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

(a) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \overset{\text{def}}{\iff} \forall (x_k) \subset A \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $x_k \to \bar{x}$: $f(x_k) \to f(\bar{x})$

✓ $\Downarrow$ $\Uparrow$ ✓

(b) f è continua in $\bar{x} \overset{\text{def}}{\iff} \forall (x_k) \subset A$ t.c. $x_k \to \bar{x}$: $f(x_k) \to f(\bar{x})$

Es: $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

limiti "significativi":

- $(x,y) \to (0,0)$
- $\|(x,y)\| \to +\infty$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(x,y) \mapsto \dfrac{x}{x^2+y^2}$ razionale $\Rightarrow$ cont.

arctan cont.

$\Rightarrow f$ cont.