21 marzo 2025

Esempi

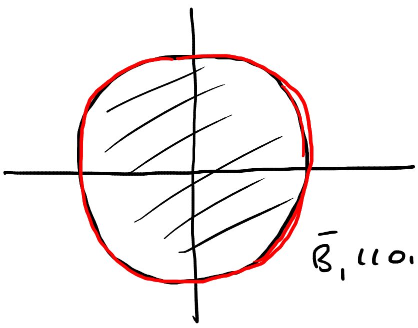
- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

$$x^2+y^2 \leq 1 \iff \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \iff \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \leq 1$$

$$\iff d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(0,0)) \leq 1$$

$$\Rightarrow E = \overline{B}_1((0,0))$$

Sappiamo che: $\underline{\partial \overline{B}_1((0,0))} = \{(x,y) \mid d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(0,0)) = 1\}$
$=: S_1((0,0))$



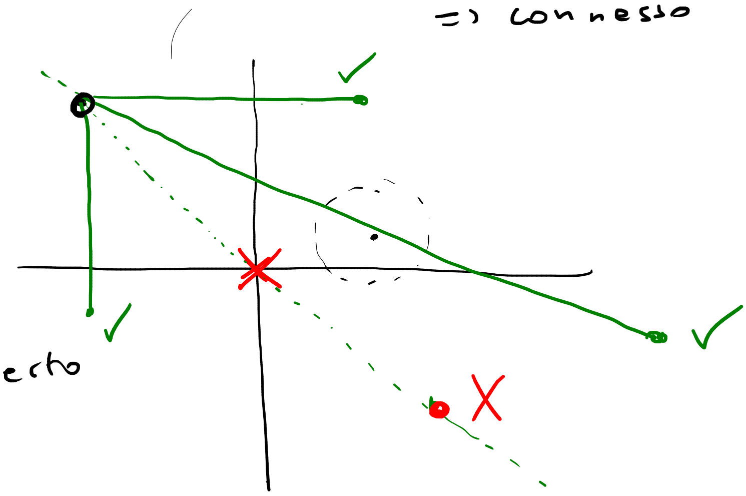
Insieme

- chiuso
- limitato

$\Big)$ $\overset{H.-B.}{\Rightarrow}$ compatto

- convesso $\Rightarrow$ stellato
$\Rightarrow$ conn. per polig.
$\Rightarrow$ connesso

- $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

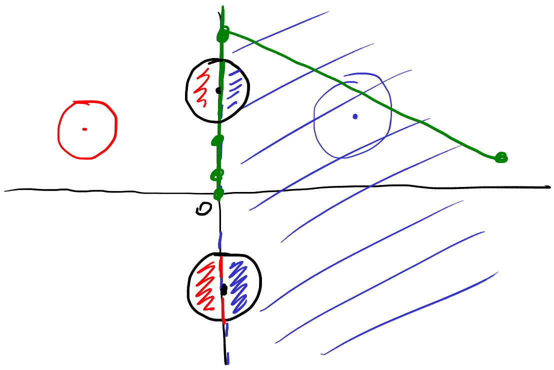


$\partial E = \{(0,0)\}$

$E \cap \partial E = \emptyset \Rightarrow E$ aperto

- limitato? No
- non compatto
- convesso? No!
- stellato? No!
- connesso per poligonali? Si ($\Rightarrow$ connesso)

- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$



$\partial E = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$\partial E \cap E = \{(0,y) \mid y \geq 0\} \neq \emptyset \Rightarrow$ E non è aperto

$(0,y)$, $y < 0$: $(0,y) \in \partial E$ ma $(0,y) \notin E$

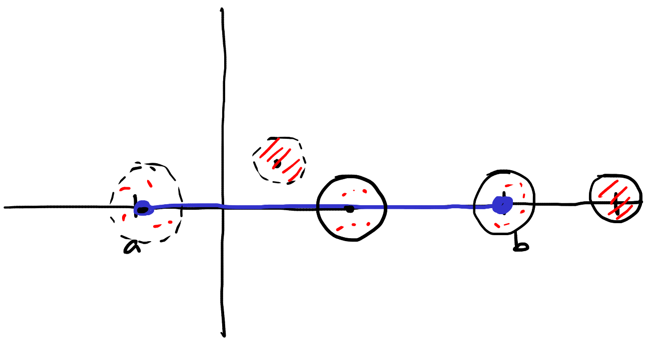
$\Rightarrow \partial E \not\subset E \Rightarrow$ E non è chiuso

($\Rightarrow$ non compatto)

E non è limitato

E convesso

- $E_1 = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y = 0\}$ $([a,b] \times \{0\})$

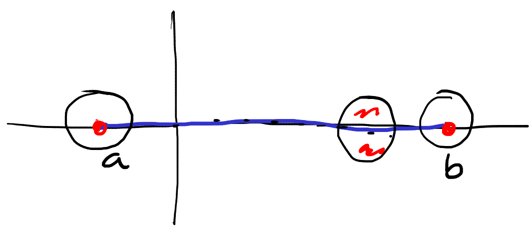


$\partial E = E$

$\Rightarrow$ E chiuso

- E limitato ($\Rightarrow$ compatto)
- E convesso

- $E_2 = \{(x,y) \mid x \in (a,b),\ y = 0\}$ $((a,b) \times \{0\})$



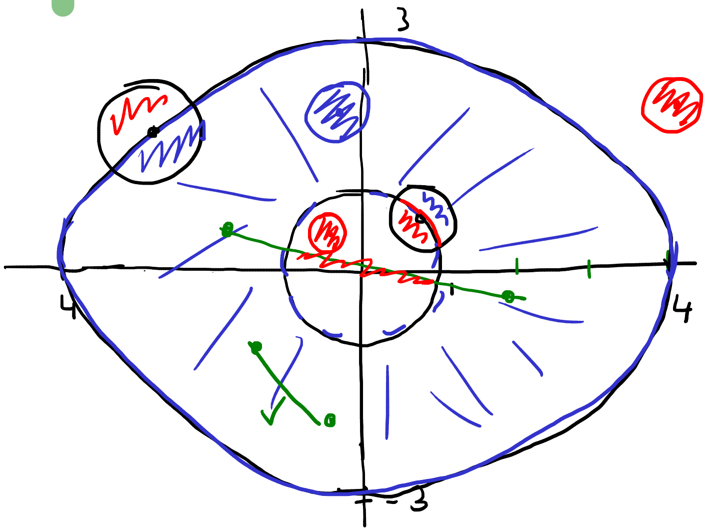
$\partial E_2 = E_1$

$\partial E_2 \cap E_2 = E_2 \neq \emptyset \Rightarrow E_2$ non è aperto

$\partial E_2 = E_1 \not\subseteq E_2 \Rightarrow E_2$ non è chiuso

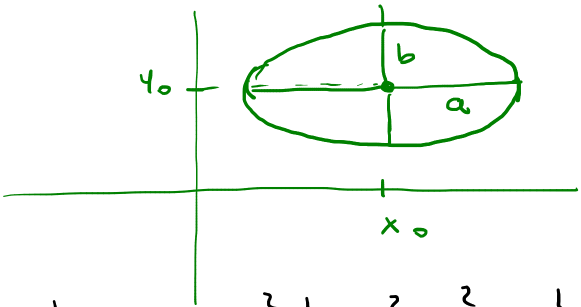
E_2 limitato, convesso.

- $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \ x^2 + y^2 > 1 \right\}$



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Equazione dell'ellisse



$$\partial E = \underbrace{\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}}_{\gamma_1} \cup \underbrace{\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}}_{\gamma_2}$$

$\partial E \cap E = \gamma_1 \neq \emptyset \Rightarrow E$ non è aperto

$\gamma_2 \cap E = \emptyset \Rightarrow \partial E \not\subseteq E \Rightarrow E$ non è chiuso

($\Rightarrow$ non compatto)

E limitato

non convesso; non stellato;

connesso per poligonali

- $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq x + 3y \leq 10 \right\}$

$2 = x + 3y \iff y = \frac{2-x}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$\partial E = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

$\sigma_1 = \{(x,y,z) \mid x+3y=2\}$, $\sigma_2 = \{(x,y,z) \mid x+3y=10\}$

$\partial E \subseteq E \Rightarrow E$ chiuso

E non limitato ($\Rightarrow$ non compatto)

E convesso.

- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 9, \quad 0 \le z \le 4\}$

... E chiuso, limitato ($\Rightarrow$ compatto)

convesso.

Esempio (di funzione continua)

(X, d) $\tilde{x} \in X$

Definisco $f: X \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) := d(x, \tilde{x})$

d su X, $d_{|\cdot|}$ su $\mathbb{R}$

Verifico che è continua in x, per ogni $x \in X$.

Fisso $x \in X$; considero una arbitraria successione $(x_n) \subset X$ t.c. $d(x_n, x) \to 0$ (cioè $x_n \to x$ in X)

Devo provare che $f(x_n) \to f(x)$ in $\mathbb{R}$, cioè che $|f(x_n) - f(x)| \to 0$

Valuto: $\forall n$

$$|f(x_n) - f(x)| = |d(x_n, \tilde{x}) - d(x, \tilde{x})| \underset{\text{2a dis. tr.}}{\le} d(x_n, x)$$

Quindi:

$$\forall n: \quad 0 \le \underset{\downarrow \atop 0}{} |f(x_n) - f(x)| \le \underset{\downarrow \atop 0}{d(x_n, x)} \quad (x_n \to x)$$

$$\overset{TCO}{\Rightarrow} \quad |f(x_n) - f(x)| \to 0 \qquad \square$$

Dimostro il Teor. di Weierstrass.

① (X, d_x) compatto, $f: X \to Y$ continua

Tesi: $f(X)$ compatto.

Fisso $(y_n) \subseteq f(X)$; devo provare che ammette una estratta convergente in $(f(X), d_Y^{f(X)})$,

cioè: $\exists (y_{k_n})$ estratta, $\exists \bar{y} \in f(X)$ t.c.

$$\cancel{d_Y^{f(X)}} (y_{k_n}, \bar{y}) \to 0$$

$\forall n: \quad y_n \in f(X) \Rightarrow \exists x_n \in X$ t.c. $y_n = f(x_n)$

Osservo che $(x_n) \subset X$, X compatto $\Rightarrow$
$\exists (x_{k_n})$ estratta da (x_n), $\exists \bar{x} \in X$ t.c.
$x_{k_n} \to \bar{x}$ in (X, d_x)

$x_{k_n} \to \bar{x}$, f continua in X, quindi in $\bar{x}$

$$\overset{(c)}{\Rightarrow} \quad f(x_{k_n}) \to f(\bar{x}) \quad \text{in } (Y, d_Y)$$

Ma: $f(x_{k_n}) = y_{k_n}$

Quindi: (y_{k_n}) è estratta da (y_n)

e $\quad y_{k_n} \to f(\underbrace{\bar{x}}_{\in f(X)}) =: \bar{y} \in f(X)$

$\square$

(2) se $Y = \mathbb{R}$: $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ compatto, cioè chiuso e limitato

Osservazione (o richiamo?) :

$E \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato

E limitato $\Rightarrow \sup E \in \mathbb{R}$, $\inf E \in \mathbb{R}$

È noto che $\exists (x_n) \subset E$ t.c. $x_n \to \sup E$

$\exists (y_n) \subset E$ t.c. $y_n \to \inf E$

$(x_n), (y_n) \subset E$, E chiuso

$\overset{\text{caratt.}}{\Rightarrow} \quad \sup E, \inf E \in E$

$\Rightarrow \sup E = \max E, \quad \inf E = \min E.$

Per l'oss: $f(X)$ ammette max e min

che equivale a: f ammette max e min.

$\square$