20 marzo 2025

Dimostro che ogni sp. metrico compatto è anche completo.

Suppongo (X, d) compatto.

Fisso $(x_n) \subset X$ succ. di Cauchy.

Siccome (X, d) è compatto, la succ. (x_n) ammette una estratta convergente.

Per la proprietà 2 delle succ. di Cauchy, la succ (x_n) è convergente

Visto che ogni succ di Cauchy è convergente, (X, d) è completo. $\square$

Dimostro che

$$x \in D_r(E) \iff \exists (x_n) \subset E \setminus \{x\} \text{ t.c. } x_n \to x$$

$(\Rightarrow)$ Suppongo $x \in D_r(E)$; per definizione:

ogni intorno di x contiene almeno un elemento di $E \setminus \{x\}$.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \setminus \{x\}$$

Costruisco la successione (x_n); osservo che

- $\forall n: \quad x_n \in E \setminus \{x\}$
- $\forall n: \quad x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \Rightarrow \underbrace{0}_{\downarrow\, 0} \leq d(x_n, x) < \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \quad \forall n$ $\quad n \to +\infty$

$$\Rightarrow d(x_n, x) \to 0 \iff (x_n) \text{ converge a } x.$$

$(\Leftarrow)$ Suppongo che esista $(x_n) \subset E \setminus \{x\}$ t.c. $x_n \to x$.

$x_n \to x \Rightarrow \forall U$ intorno di x si ha:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in U \quad \text{dfnt} \\ \\ \forall n: \; x_n \in E \setminus \{x\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

dfnt: $x_n \in U \cap E \setminus \{x\}$

$\Rightarrow U \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset$

Quindi: $x \in Dr(E)$ $\square$

Dimostro che

$$x \in \bar{E} \iff \exists (x_n) \subset E \text{ t.c. } x_n \to x$$

$(\Rightarrow)$ Fisso $x \in \bar{E} = E \cup Dr(E)$

Se $x \in Dr(E) \overset{1}{\Rightarrow} \exists (x_n) \subset \underbrace{E \setminus \{x\}}_{\subseteq E}$ t.c. $x_n \to x$

se $x \in E$, mi basta scegliere $x_n = x \; \forall n$.

$(\Leftarrow)$ Suppongo che esista $(x_n) \subset E$ t.c. $x_n \to x$

Distinguo due casi:

- $\left.\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x_k = x \\ x_k \in E \end{array}\right\} \Rightarrow x \in E \Rightarrow x \in \bar{E}$

- $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq x \Rightarrow (x_n) \subset E \setminus \{x\}$

  $\Rightarrow x$ è limite di una succ. di elem. di $E \setminus \{x\}$

  $\overset{1}{\Rightarrow} x \in Dr(E) \Rightarrow x \in \bar{E}$ $\square$

Dimostro che

E è chiuso $\iff$ E contiene i limiti di tutte le succ. di elementi di E convergenti in (X, d)

$\iff$ $\forall (x_n) \subset E$ t.c. $\exists\, x \in X$ t.c. $d(x_n, x) \to 0$, risulta: $x \in E$

($\Rightarrow$) Suppongo E chiuso.

Fisso $(x_n) \subset E$ e suppongo che esista $x \in X$ t.c. $x_n \to x$

$\Rightarrow$ x è limite di una succ. di elementi di E

$\overset{2}{\Rightarrow}$ $x \in \bar{E}$

E chiuso $\iff$ $E = \bar{E}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $x \in E$

($\Leftarrow$) Provare che E è chiuso equivale a provare che $\bar{E} \subseteq E$

Fisso $x \in \bar{E}$ $\overset{2}{\Rightarrow}$ $\exists (x_n) \subset E$ t.c. $x_n \to x$

$\overset{\text{ipot.}}{\Rightarrow}$ $x \in E$

$\square$

Es.

$(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$

$A = (0, 2]$ $\qquad x_n = \frac{1}{n}$ $\quad \forall n \geq 1$

$\forall n$: $x_n \in A$, $\quad x_n \to 0 \notin A$

Quindi: (x_n) conv. (a 0) in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$

ma: (x_n) <u>non</u> conv. (a 0) in $(A, d^A_{|\cdot|})$

(perché $0 \notin A$)

Dimostro il teorema (sul "trasferimento")

(X, d) sp. metrico, $A \subset X$ chiuso.

① Suppongo (X, d) completo.

Fisso (x_n) succ. di Cauchy in (A, d^A)

oss.
$\Rightarrow$ (x_n) succ. di Cauchy in (X, d)

(X, d) completo
$\Rightarrow$ $\underset{\subseteq A}{(x_n)}$ convergente in (X, d)

A chiuso
$\Rightarrow$ (x_n) convergente in (A, d^A) $\square$

② Suppongo (X, d) compatto.

Fisso (x_n) succ. di elementi di A

$\Rightarrow$ (x_n) succ. di elementi di X

(X, d) compatto
$\Rightarrow$ $\exists\, \underset{\subseteq A}{(x_{k_n})}$ estratta convergente in (X, d)

A chiuso
$\Rightarrow$ (x_{k_n}) converge in (A, d^A) $\square$

Dimostro "completo $\Rightarrow$ chiuso"

Suppongo (A, d^A) sott. metrico di (X, d) e (A, d^A) completo.

Per provare che A è chiuso, utilizzo la caratterizzazione sequenziale degli insiemi chiusi.

Fisso $(x_n) \subset A$, suppongo (x_n) convergente in (X, d) a un certo x; devo mostrare che $x \in A$

Siccome (x_n) converge in (X, d), allora (x_n) è di Cauchy in (X, d), che equivale a dire che (x_n) è di Cauchy in (A, d^A)

Per ipotesi, (A, d^A) è completo, quindi: (x_n) converge in (A, d^A). Pertanto il suo limite appartiene ad A, perciò per l'unicità del limite: $x \in A$. $\square$

Es.

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n} \quad \forall n \end{cases} \qquad x_n \to \sqrt{2}$$

Dimostro "compatto $\Rightarrow$ chiuso e limitato"

Oss: compatto $\Rightarrow$ completo $\overset{①}{\Rightarrow}$ chiuso ✓

Suppongo (A, d^A) compatto e verifico che A è limitato.

Per assurdo, suppongo A non limitato (cioè: non esiste alcuna palla (chiusa) che contiene A).

Fisso $\tilde{x} \in X$. Per ipotesi, non esiste alcuna palla chiusa di centro $\tilde{x}$ che contiene A, cioè:

$$\forall r > 0 \quad \exists\, x \in A \quad \text{t.c.} \quad x \notin \bar{B}_r(\tilde{x})$$

$$\Updownarrow$$

$$d(x, \tilde{x}) > r$$

In particolare:

$$\forall n \geq 1 \quad \exists\, x_n \in A \quad \text{t.c.} \quad d(x_n, \tilde{x}) > n \quad \odot$$

Osservo che (x_n) è una succ di elementi di A, e A è compatto, quindi:

$$\exists\, (x_{k_n}) \text{ estratta da } (x_n) \text{ convergente in } (A, d^A)$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \bar{x} \in A \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{d^A(x_{k_n}, \bar{x})}_{= d(x_{k_n}, \bar{x})} \longrightarrow 0$$

Per ogni n:

$$k_n \overset{\odot}{<} d(x_{k_n}, \tilde{x}) \leq d(x_{k_n}, \bar{x}) + d(\bar{x}, \tilde{x})$$

$n \to +\infty$: $\quad k_n \to +\infty, \quad d(x_{k_n}, \bar{x}) \to 0, \quad d(\bar{x}, \tilde{x}) \to d(\bar{x}, \tilde{x})$

Passando al limite: $\quad +\infty \leq d(\bar{x}, \tilde{x})$, assurdo !!

La contraddizione mostra che A è limitato. $\square$

Dimostro il teor. di: Heine-Borel

Mi basta provare l'implicazione

chiuso e limitato $\Rightarrow$ compatto

perché l'altra è vera in generale.

Supponge $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato.

Fisso $(x_k) \subset A$

A limitato $\Rightarrow$ (x_k) è limitata

$\overset{B.-W}{\Rightarrow}$ $\exists$ (x_{k_n}) $\subseteq A$ estratta convergente in $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$

$\overset{A \text{ chiuso}}{\Rightarrow}$ (x_{k_n}) converge in (A, d^A)

$\Rightarrow$ (A, d^A) compatto. $\square$