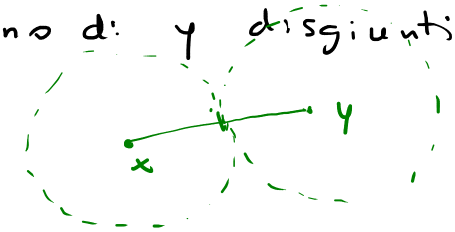
18 marzo 2025

Dimostro la proprietà di separazione

$x, y \in X$, $x \neq y$ Tesi: $\exists$ un intorno di x e un intorno di y disgiunti



$x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$

Pongo $r := \dfrac{d(x,y)}{2}$, osservo che $r > 0$

Verifico che $B_r(x)$ e $B_r(y)$ sono disgiunti.

Per assurdo, suppongo che esista $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$

Allora:

$$\left.\begin{array}{l} z \in B_r(x) \Rightarrow d(z,x) < r \\ z \in B_r(y) \Rightarrow d(z,y) < r \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$d(x,y) \overset{\text{dis.tr.}}{\leq} \underbrace{d(x,z)}_{<r} + \underbrace{d(z,y)}_{<r} < 2r \overset{\text{def}}{=} d(x,y) \; !$$

La contraddizione prova che $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$ $\square$

Dimostro l'unicità del limite.

Per assurdo, suppongo che (x_n) converga a x e y, con $x \neq y$.

Per il lemma, esistono U intorno di x e V intorno di y tali che $U \cap V = \emptyset$.

$$\left.\begin{array}{llll} x_n \to x & \overset{(a)}{\Rightarrow} & \text{definitivamente}: & x_n \in U \\ x_n \to y & \underset{(a)}{\Rightarrow} & \quad '' \quad : & x_n \in V \end{array}\right| \Rightarrow$$

definitivamente $x_n \in \underbrace{U \cap V}_{= \emptyset}$!!

La contraddizione mostra che non può essere $x \neq y$. $\square$

Oss.

In (X, d_{DIS}): $(x_n) \subset X$, $x \in X$

$$d_{DIS}(x_n, x) = \begin{cases} 0 & x_n = x \\ 1 & x_n \neq x \end{cases}$$

L'unica possibilità affinché $d_{DIS}(x_n, x) \to 0$ è che definitivamente (da ora in poi: dfnt) risulti: $d_{DIS}(x_n, x) = 0$, cioè:

$$\text{dfnt}: \quad x_n = x$$

Quindi: le successioni convergenti in (X, d_{DIS}) sono tutte e sole le succ. dfnt. costanti.

In $\mathbb{R}$ con la metrica del valore assoluto:

$(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$$x_n \to x \overset{(b)}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \text{dfnt } \underset{|x_n - x| < \varepsilon}{d_{|\cdot|}(x_n, x) < \varepsilon}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \text{dfnt}: \ x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$

la definizione data in AM I !

In $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$: d_1, d_{max}

$(x_k) \subset \mathbb{R}^n, \qquad x \in \mathbb{R}^n$

$$x_k \to x \text{ in } (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n}) \overset{(c)}{\iff} \overset{d_1,\ d_{max}}{d_{\mathbb{R}^n}}(x_k, x) \to 0$$

$$\iff \cancel{\sqrt{}}\sum_{i=1}^{n} (x_{k,i} - x_i)^2 \longrightarrow 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_i| \to 0$$

$$\max_{1 \le i \le n} |x_{k,i} - x_i| \to 0$$

$k \to +\infty$

Verifico che $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\forall j \in \{1, \dots, n\}$:

$$|x_j - y_j| \overset{(1)}{\le} \underbrace{d_{\mathbb{R}^n}(x,y)}_{\ge 0} \overset{(2)}{\le} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|}_{\ge 0}$$

(1) : $$|x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \le \sqrt{(x_j - y_j)^2 + \underbrace{\sum_{i \ne j} (x_i - y_i)^2}_{\ge 0}}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \overset{def}{=} d_{\mathbb{R}^n}(x,y) \qquad \square$$

(2) oss. $$\iff d_{\mathbb{R}^n}(x,y)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - y_i)^2} \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i - y_i|^2} + \overbrace{\text{"doppi prodotti"}}^{\ge 0}$$

$=$ (tra i termini $(x_i-y_i)^2$ e $|x_i-y_i|^2$)

↑ di termini ≥ 0

$\square$

Dimostro la Proposizione

① Suppongo (x_k) limitata in $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n, r > 0$ t.c. $\forall k: x_k \in \overline{B}_r(\bar{x})$

$\Rightarrow \forall k: d_{\mathbb{R}^n}(x_k, \bar{x}) \leq r$

Per il Lemma: $\Rightarrow$

$\forall k, \forall j \in \{1, \dots, n\}: |x_{k,j} - \bar{x}_j| \leq d_{\mathbb{R}^n}(x_k, \bar{x})$

$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall k: |x_{k,j} - \bar{x}_j| \leq r \iff$

" " $\bar{x}_j - r \leq x_{k,j} \leq \bar{x}_j + r$

$\Rightarrow \forall j: (x_{k,j})$ è limitata.

Viceversa, suppongo che $\forall j: (x_{k,j})$ limitata

$\Rightarrow \forall j \ \exists \bar{x}_j, \exists r_j > 0$ t.c.

$\forall k: \bar{x}_j - r_j \leq x_{k,j} \leq \bar{x}_j + r_j$

$\iff \forall k, \forall j: |x_{k,j} - \bar{x}_j| \leq r_j$

$\bar{x} := (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$\Rightarrow \forall k: d_{\mathbb{R}^n}(x_k, \bar{x}) \leq \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - \bar{x}_j| \leq \sum_{j=1}^{n} r_j =: r$

$\Rightarrow \forall k: x_k \in \overline{B}_r(\bar{x})$ $\square$

Suppongo $x_k \to x$ in $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$

$\Rightarrow d_{\mathbb{R}^n}(x_k, x) \to 0$ ⊙

Per il lemma,

$$\forall j: \quad 0 \le |x_{k,j} - x_j| \le d_{\mathbb{R}^n}(x_k, x) \qquad (\cdot\cdot)$$

$$\odot + (\cdot\cdot) + TCO \Rightarrow \forall j: \quad |x_{k,j} - x_j| \to 0$$

$$\Rightarrow \forall j: \quad x_{k,j} \to x_j \quad \text{in } (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$$

Viceversa, suppongo che per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$x_{k,j} \to x_j \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Pongo $x := (x_1, \dots, x_n)$ e osservo che per il lemma:

$$\forall k: \quad 0 \le d_{\mathbb{R}^n}(x_k, x) \le \underbrace{\underbrace{|x_{k,1} - x_1|}_{\substack{x_{k,1} \to x_1 \\ \downarrow \\ 0}} + \dots + \underbrace{|x_{k,n} - x_n|}_{\substack{x_{k,n} \to x_n \\ \downarrow \\ 0}}}_{\to 0}$$

$$\overset{TCO}{\Rightarrow} d_{\mathbb{R}^n}(x_k, x) \to 0, \quad \text{cioè: } x_k \to x \quad \text{in } (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n}).$$

□

Dimostro il teor. di B.-W. in $\mathbb{R}^3$

Considero $(x_k, y_k, z_k) \subset \mathbb{R}^3$ e suppongo che sia limitata.

Per il lemma, le successioni (x_k), (y_k), (z_k) $(\subset \mathbb{R})$ sono limitate.

Siccome (x_k) è limitata, per B.-W. in $\mathbb{R}$: esiste una succ. (x'_k) estratta da (x_k) che converge a un certo $x \in \mathbb{R}$.

Considero (y'_k) estratta da (y_k) avente gli stessi indici di (x'_k).

Essendo estratta da (y_k), che è limitata, anche (y'_k) è limitata; per B.-W. in $\mathbb{R}$, ammette una estratta (y''_k) convergente a un certo $y \in \mathbb{R}$.

Considero (z''_k) estratta da (z_k) avente gli stessi indici di (y''_k).
Ancora per B.W. in $\mathbb{R}$, deduco che (z''_k) ha una estratta (z'''_k) convergente a un certo $z \in \mathbb{R}$.

Considero (x'''_k) estratta da (x'_k) con gli stessi indici di (z'''_k); osservo che (x'''_k) converge a x (perché $x'_k \to x$)

Infine considero (y'''_k) estratta da (y''_k), che converge a y; quindi anche $y'''_k \to y$.

Considero (x'''_k, y'''_k, z'''_k), che è estratta da (x_k, y_k, z_k); per la banalità del limite:

$$\left.\begin{array}{l} x'''_k \to x \\ y'''_k \to y \\ z'''_k \to z \end{array}\right) \Rightarrow (x'''_k, y'''_k, z'''_k) \to (x, y, z).$$

$\square$

Verifico che "convergente $\Rightarrow$ di Cauchy".

Suppongo $x_n \to x$

Fisso $\varepsilon > 0$; $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq \nu$

$\Rightarrow \forall n, m \geq \nu$:

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x, x_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \qquad \square$$

Esempio (di succ. di Cauchy non convergente)

$d_* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ t.c.

$$d_*(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

È una metrica?

- $d_*(x,y) = 0 \iff |\arctan(x) - \arctan(y)| = 0$

$\iff \arctan(x) - \arctan(y) = 0$

$\iff \arctan(x) = \arctan(y)$

arctan ingettiva

$\iff x = y$

- Simmetria ... ovvia

- $d_*(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

$= |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)|$

dis. tr.

$\leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)|$

$= d_*(x,z) + d_*(z,y) \qquad \square$

Considero $x_n = n \quad \forall n$; verifico che (x_n) è di Cauchy:

$d_*(x_n, x_m) = |\arctan(x_n) - \arctan(x_m)|$

$$= |\underbrace{\arctan(n)}_{\to \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan(m)}_{\to \frac{\pi}{2}}| \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ (x_n) è di Cauchy.

Per assurdo, suppongo (x_n) convergente in $(\mathbb{R}, d_*)$:

esiste $x \in \mathbb{R}$ t.c. $d_*(x_n, x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\Leftrightarrow \quad |\arctan(x_n) - \arctan(x)| \to 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \arctan(x_n) \to \arctan(x)$$

$$\arctan(x_n) = \arctan(n) \to \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \quad \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad !$$

Dimostro le proprietà delle succ. di Cauchy.

(1) Suppongo (x_n) di Cauchy e dimostro che è limitata.

Fisso $\varepsilon = 1$; in corrispondenza, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n, m \geq \nu : \quad d(x_n, x_m) < 1$$

Questo implica che

$$\forall n \geq \nu : \quad d(x_n, x_\nu) < 1 \qquad \odot$$

Definisco

$$\underbrace{M}_{\geq 0} := \max\{\underbrace{d(x_1, x_\nu)}_{\geq 0}, \underbrace{d(x_2, x_\nu)}_{\geq 0}, \dots, \underbrace{d(x_{\nu-1}, x_\nu)}_{\geq 0}\}$$

$\Leftarrow$

e $\quad r := 1 + M$; osservo che $r > 0$.

per ogni $n \geq 1$:

$$d(x_n, x_\nu) \begin{cases} \leq M \leq r & n \leq \nu - 1 \\ < 1 \leq r & n \geq \nu \end{cases}$$

$\uparrow$ ⊙

quindi :

$$\forall n \geq 1 : \quad x_n \in \overline{B}_r(x_\nu).$$

cioè : (x_n) è limitata. $\square$

(2) Suppongo (x_n) di Cauchy e (x_{k_n}) estratta convergente a $x \in X$; dimostro che (x_n) converge a x.

Fisso $\varepsilon > 0$.

(x_n) di Cauchy $\Rightarrow$

$$\exists \nu_1 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \geq \nu_1 : \quad d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

$x_{k_n} \to x \quad \Rightarrow$

$$\exists \nu_2 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu_2 : \quad d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Pongo $\nu := \max\{\nu_1, \nu_2\}$; per ogni $n \geq \nu$:

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{k_n})}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{k_n}, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per (*) $\qquad$ per (**)

$n \geq \nu \geq \nu_1$ ✓

$k_n \geq n \geq$

$\uparrow$ oss.

$\square$

Dimostro che $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ è completo.

Fisso $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ succ. di Cauchy.

Per la prop. 1, (x_k) è limitata.

Per il teor. di B.-W.: (x_k) ha una estratta convergente.

Per la prop. 2: (x_k) è convergente. $\square$