14 marzo 2025

Verifico che $E \cup \partial E = E \cup Dr(E)$

"$\subseteq$" Fisso $x \in E \cup \partial E$ Tesi: $x \in E \cup Dr(E)$

Se $x \in E$, ovviamente $x \in E \cup Dr(E)$

Se $x \notin E$, dato che $x \in \partial E$, ogni suo intorno contiene almeno un elemento y di E e almeno un elemento z di E^c; dato che $x \notin E$, necessariamente $y \neq x$. Le frasi sottolineate dicono che x è punto di accumulazione per E, cioè $x \in Dr(E)$ e quindi $x \in E \cup Dr(E)$.

"$\supseteq$" Fisso $x \in E \cup Dr(E)$ Tesi: $x \in E \cup \partial E$

Se $x \in E$, la tesi è vera.

Se $x \notin E$, dato che $x \in Dr(E)$ ogni suo intorno contiene almeno un elemento di E (diverso da x); tale intorno contiene anche x, e $x \in E^c$

Le parti sottolineate dicono che $x \in \partial E$, e quindi $x \in E \cup \partial E$. $\square$

Esempio.

(X, d_{DIS}) $E \subset X$

$\forall x_0 \in X: \quad B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$ $\Rightarrow$ $E \cap E^c = \phi$

$B_{\frac{1}{2}}(x_0)$ non può contenere almeno un elemento di E e almeno un elemento di E^c

$\Rightarrow \quad x_0 \notin \partial E$

Quindi: $\quad \partial E = \emptyset$.

Perciò: $\quad \forall E \subseteq X: \quad E \cap \partial E = E \cap \emptyset = \emptyset$

$\Rightarrow \quad E$ è aperto

Inoltre: $\quad \forall E \subseteq X: \quad \partial E = \emptyset \subseteq E$

$\Rightarrow \quad E$ è chiuso.

Dimostro che l'unione di una famiglia qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto.

$(A_i)_{i \in I} \qquad \forall i \in I: \; A_i \subseteq X$ aperto

Pongo $A := \bigcup_{i \in I} A_i$; dimostro che A è aperto.

Fisso $x_0 \in A \quad \Rightarrow \quad \exists k \in I$ t.c. $x_0 \in A_k$, A_k aperto

$\Rightarrow \quad \exists r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq A_k$

$A_k \subseteq A$

$\Rightarrow \quad \exists r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq A$

$\Rightarrow \quad x_0$ è interno ad A $\square$

Dimostro che l'intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è un insieme aperto.

Siano $A_1, \dots, A_k \subseteq X$ aperti. Pongo $A := \bigcap_{i=1}^{k} A_i$

Fisso $x_0 \in A$.

$\Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} : \quad x_0 \in A_i$

A_i aperto
$\Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \exists r_i > 0 \quad$ t.c. $\quad B_{r_i}(x_0) \subseteq A_i$

Definisco $\quad r := \min\{r_1, \dots, r_k\} \quad (r > 0)$

Per ogni: $i \in \{1, \dots, k\}$: $\quad B_r(x_0) \underset{r \le r_i}{\subseteq} B_{r_i}(x_0) \subseteq A_i$

Quindi:

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \quad B_r(x_0) \subseteq A_i$$

$$\Rightarrow \quad B_r(x_0) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} A_i =: A$$

Quindi: x_0 è interno ad A. $\square$

Esempio (che mostra che l'intersezione infinita di insiemi aperti non è necessariamente un insieme aperto).

In $\mathbb{R}$ considero $\quad A_k := \underbrace{\left(0, 1 + \frac{1}{k}\right)}_{\text{intervallo aperto} \Rightarrow \text{aperto.}} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \overset{??}{=} \underbrace{(0, 1]}_{}$$ non è un insieme aperto (perché non disgiunto dalla propria frontiera)

$\forall k : \quad (0, 1] \subset \left(0, 1 + \frac{1}{k}\right) \quad \Rightarrow \quad (0,1] \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

Fisso $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ e provo che $x \in (0,1]$

$x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \Rightarrow \forall k : \; x \in A_k \Rightarrow \forall k : \; 0 < x < \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

$k \to +\infty$

$0 < x \le 1$

TPS

$\Rightarrow \quad 0 < x \le 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (0,1]$. $\square$

Esempio $\left(\partial B_r(x_0) \neq S_r(x_0) \right)$

(X, d_{DIS}) $\left(\underbrace{X \text{ con almeno due elementi}} \right)$

$x_0 \in X$ $\quad \underline{S_1(x_0)} \overset{\text{def}}{=} \{ x \in X \mid d_{DIS}(x, x_0) = 1 \}$

$\qquad \neq \qquad = X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

$\overline{\partial B_1(x_0)} = \emptyset$ (TUTTI gli insiemi hanno frontiera vuota)

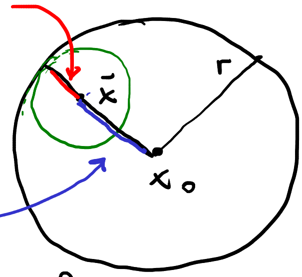
Verifico che $B_r(x_0)$ è aperto, in qualsiasi spazio metrico

Fisso $\bar{x} \in B_r(x_0)$ e dimostro che $\bar{x}$ è interno a $B_r(x_0)$, cioè che esiste $s > 0$ t.c. $B_s(\bar{x}) \subseteq B_r(x_0)$

$r - d(\bar{x}, x_0)$

Pongo $s := r - d(\bar{x}, x_0)$

e osservo che $s > 0$



$d(\bar{x}, x_0)$

$B_r(x_0)$

(perché $d(\bar{x}, x_0) < r$, in quanto $\bar{x} \in B_r(x_0)$)

Verifico che $B_s(\bar{x}) \subseteq B_r(x_0)$

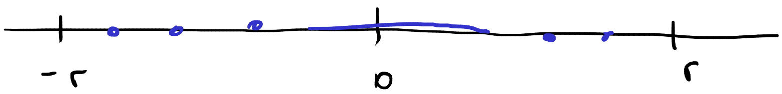
Per ogni $x \in B_s(\bar{x})$: $d(x, \bar{x}) < s$

dis. tr.

$\Rightarrow \underline{d(x, x_0)} \leq d(x, \bar{x}) + d(\bar{x}, x_0)$

$\qquad \underline{<} \ s + d(\bar{x}, x_0) = \underline{r}$

$\Rightarrow x \in B_r(x_0)$. $\square$



$\forall x \in E : \quad |x| \leq r$

$\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\quad |x - 0| \leq r$

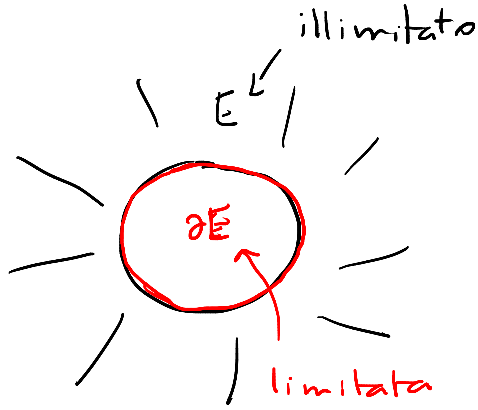
$\qquad\qquad\quad d(x, 0) \leq r$

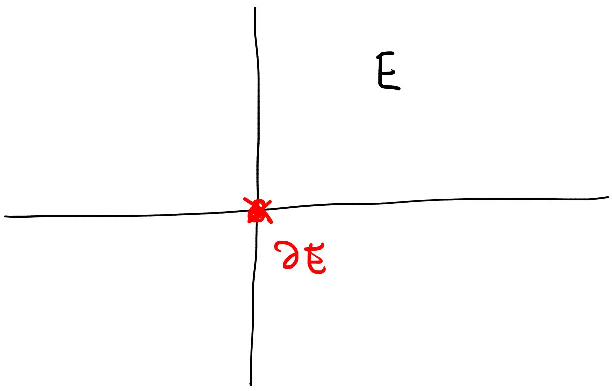
$\qquad\qquad\quad \uparrow$ metrica del val. ass.

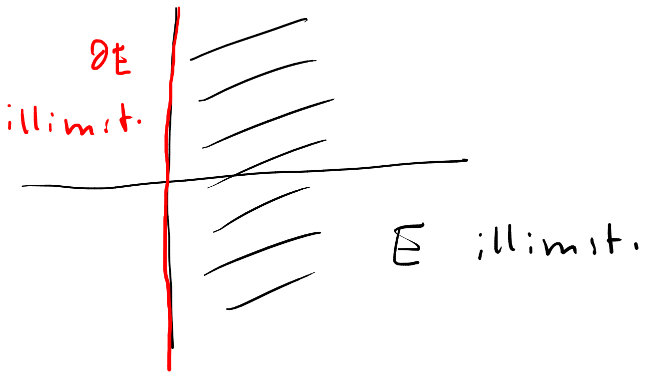
$\Rightarrow \quad \forall x \in E : \quad x \in \overline{B}_r(0)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow = 0_{\mathbb{R}}$

Es. $\quad (\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$







(X,d) $\quad A\subset X \quad d^A := d|_{A\times A}$

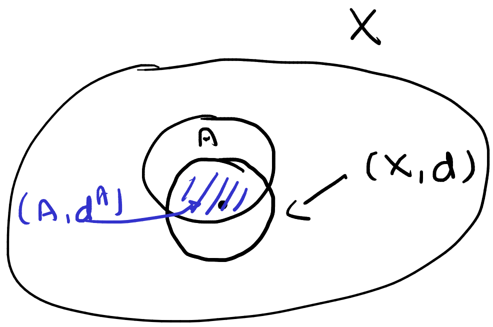
$x_0\in A,\quad r>0$

$$B_r^A(x_0) \overset{def}{=} \{x\in A \mid d^A(x,x_0)<r\}$$

$$= \{x\in A \mid d(x,x_0)<r\}$$

$$= \{x\in X \mid d(x,x_0)<r\}\cap A$$

$$= B_r(x_0)\cap A$$



Considerazioni introduttive alla def. di convergenza

$x_n \to \ell \overset{def}{\iff}$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \nu\in\mathbb{N} \quad$ t.c. $\quad \forall n\geq\nu$: $\quad \ell-\varepsilon < x_n < \ell+\varepsilon$

$x_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

$\Updownarrow$

$|x_n-\ell|<\varepsilon$

$\parallel$

$0 \leq d(x_n,\ell) < \varepsilon$

$\iff \lim_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0$

$\mathbb{R}$, $\quad d \leftrightarrow |\cdot|$